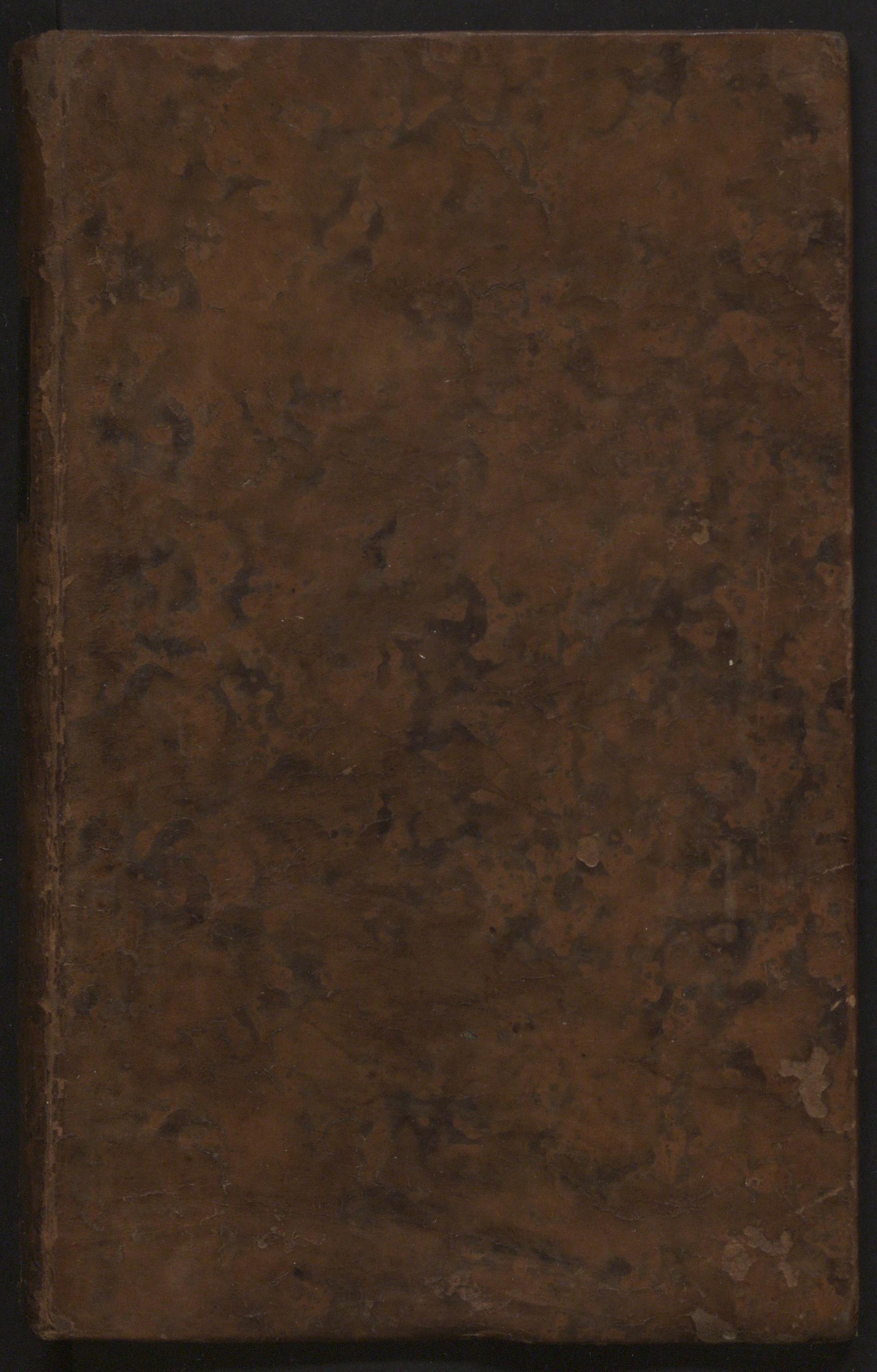


КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ.

КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ

Господина Безу, Члена Французской Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспитанниковъ Артиллерійскаго и Морскаго Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.

ПЕРЕВЕДЕНЪ

Васильемъ Загорскимъ

въ

пользу и употребленіе

БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,

Воспитывающагося

въ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ.

Часть Третія,

содержащая въ себѣ

АЛГЕБРУ съ приноровкою ея къ ГЕОМЕТРІИ и КОНИЧЕСКОЕ СѢЧЕНІЕ.

МОСКВА,

въ Университетской Типографіи,

у Хр. Клаудія.

1801.

Съ одобренія Московской Цензуры.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПЕРВОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,



АЛГЕБРА.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ,

Вѣ которомѣ преподаются Правила Исчисленія Алгебраическихѣ Количествѣ.

1. Наука, называемая *Алгеброю*, показываетѣ средства, какѣ производить общими правилами рѣшеніе всѣхѣ вопросовѣ, какіе только могутѣ предложены быть о количествахѣ.

А дабы правила сіи были общими, то они не должны зависѣть отѣ частной величины разсматриваемыхѣ количествѣ, но отѣ свойства каждаго вопроса, и должны быть всегда одинаковы для всѣхѣ вопросовѣ одного рода.

Изѣ сего слѣдуетѣ, что Алгебра не должна быть ограничена вѣ представленіи количествѣ тѣми же знаками, какіе употреб-

ляетъ Ариѳметика. Ибо производя рѣшеніе по правиламъ сей послѣдней, не можно видѣть въ заключеніи той дороги, которая къ оному руководствовала. Не можно знать ничего, одно или многія Ариѳметическія дѣйствія вывели въ заключеніи 12, потому что сіе число можетъ происходить изъ умноженія 3 на 4, или 2 на 6, или чрезъ сложеніе 5 съ 7, или 2 съ 10, или вообще посредствомъ всякаго другаго совокупленія дѣйствій. Ариѳметика преподаетъ правила доходить до нѣкоторыхъ заключеній (resultats); но заключенія сіи не могутъ снабжать правилами: Алгебрѣ предоставлено исполнить сіи два предмета, и для того она представляетъ количества общими знаками (знаки сіи состоятъ изъ Азбучныхъ буквъ), которые не имѣя никакого особеннаго отношенія съ тѣмъ или другимъ числомъ, представляютъ вообще, что кому угодно, или что надобно имъ представлять. Сіи знаки, находясь предъ глазами во всей выкладкѣ, сохраняютъ, такъ сказать, въ себѣ впечатлѣніе всѣхъ дѣйствій, чрезъ которыя они перешли, или по крайней мѣрѣ представляютъ въ результатахъ сихъ дѣйствій, какой должно держаться дороги для достиженія той же цѣли легчайшими средствами. Но мы не намѣрены распространяться здѣсь въ дальнѣйшемъ открытіи поня-

тія объ Алгебрѣ; послѣдствіе сочиненія покажетъ его само собою.

Въ Алгебрѣ не только представляются сами количества общими знаками, но также ихъ взаимное между собою отношеніе, равно какъ различныя дѣйствія, производимыя надъ ними; словомъ, въ ней все совершается представленіемъ: почему говоря о сдѣланномъ ею какомъ нибудь дѣйствіи, не должно разумѣть, чтобъ въ самой вещи дѣйствіе было сдѣлано, но что количество получило другой новой видъ. Поступая впередъ покажемъ, какъ представляются различныя отношенія количествъ.

О Начальныхъ Дѣйствіяхъ, которыя производятся въ Количествахъ, разсматриваемыхъ вообще.

2. Алгебра производитъ въ количествахъ, изображенныхъ буквами, тѣ же дѣйствія, какія Ариѳметика въ числахъ: то есть, количества сіи складываются, вычитаются, умножаются, дѣлятся и проч. Но Алгебраическія дѣйствія различествуютъ отъ Ариѳметическихъ тѣмъ, что въ заключеніяхъ или результатахъ ихъ представляются однѣ показанія Ариѳметическихъ дѣйствій.

О Сложенїи и Вычитанїи.

3. Для сложенія подобныхъ количествъ не находится никакого особеннаго правила; потому что для сложенія количества, представленнаго чрезъ a съ тѣмъ же количествомъ a, должно написать $2a$. Для сложенія $2a$ съ $3a$, надлежитъ написать $5a$, и такъ далѣе.

Чтожъ касается до неодинакихъ или неподобныхъ количествъ, которыя изображаются различными буквами, то дѣйствіе сложенія ихъ представляется однимъ показаніемъ чрезъ слѣдующій знакъ $+$, которой произносится *плюсъ* или *съ*.

И такъ для сложенія количества, изображеннаго чрезъ a, съ количествомъ, представленнымъ буквою b, не можно ничего другаго сдѣлать, какъ написать $a+b$; почему результатъ или заключеніе сего дѣйствія остается не извѣстнымъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ извѣстны въ особенности количества изображенныя чрезъ a и b. Естьли a значитъ 5, а b 12, то $a+b$ означаетъ 17.

Равнымъ образомъ при сложеніи - - - $5a+3b$
съ - - - - - - - - - - - - - - - $9a+2c$
и съ - - - - - - - - - - - - - - $9b+3d$

должно написать - - - $5a+3b+9a+2c+9b+3d$
и по приведеніи - - - - - $14a+12b+2c+3d$
чрезъ совокупленіе подобныхъ количествъ.

4. То, что сказано о сложеніи, равно принадлежитъ и до вычитанія. Естьли количества бываютъ подобны, то при вычитаніи ихъ нѣтъ особеннаго правила; ибо отнимая $2a$ изъ $5a$, въ остаткѣ находимъ $3a$.

Но въ неподобныхъ количествахъ вычитаніе изображается показаніемъ чрезъ знакъ —, которой произносится словами *минусъ* или *безъ*.

Почему изъ a вычитая b, пишемъ $a - b$.

Изъ $5a$ отнимая $3b$, пишемъ - - - $5a - 3b$.

Естьли изъ - - - - - - - -	$9a + 6b$
требуется вычесть - - - - - - -	$5a + 4b$
то должно написать - - - -	$9a + 6b - 5a - 4b$
и по приведеніи - - - - - - - -	$4a + 2b$

5. Число, стоящее предъ буквою, называется *Коеффиціентомъ* ея; и такъ въ $3b$, 3 есть коеффиціентъ буквы b. Когда буква должна имѣть единицу коеффиціентомъ, тогда сей коеффиціентъ не ставится: на пр. вычитая $2a$ изъ $3a$, въ остаткѣ получимъ $1a$, и потому пишемъ только a. Совсѣмъ тѣмъ не должно почитать, чтобъ буква, при которой не находится коеффиціента, не имѣла его совсѣмъ; онъ бываетъ въ такомъ случаѣ единица, или 1.

6. Мало нужды до порядку сложенныхъ или вычтенныхъ количествъ; ихъ можно поставлять всячески. На примѣръ при сложеніи a съ b, можно одинаково написать $a + b$, или $b + a$; и при вычитаніи b изъ a, можно написать или $a - b$, или $- b + a$.

7. Замѣтимъ здѣсь, что количество, предъ которымъ не находится никакого знака,

почитается за такое, которое имѣетъ знакъ $+$; a есть тоже, что $+a$: въ количествѣ, первое мѣсто въ строкѣ занимающемъ, обыкновенно уничтожается знакъ $+$; но естьли сей знакъ долженъ быть $-$, то всегда поставляется.

8. Когда по окончанiи дѣйствiя надобно дѣлать приведенiе, то можетъ случиться, что количество съ знакомъ $-$ будетъ имѣть коеффицiентомъ больше того, какой находится въ подобномъ количествѣ съ знакомъ $+$; однако въ обоихъ случаяхъ надлежитъ поступать по сему общему правилу: *Напиши напередъ всѣ части данныхъ для сложенiя Алгебраическихъ количествъ по порядку, какъ онѣ слѣдуютъ, съ тѣми же знаками, какiе при нихъ находятся; потомъ одинакiя количества приведи въ одно, совокупивъ съ одной стороны всѣ съ знакомъ $+$, а съ другой всѣ съ знакомъ $-$; наконецъ меньшой результатъ вычти изъ большаго, и предъ остаткомъ поставь тотъ знакъ, какой находился при большомъ.*

На примѣръ, естьли по окончанiи дѣйствiя выдетъ $14a + 12b + 2c + 3d + a + b + 4d - 4c$, то количество сiе приведено будетъ въ $15a + 13b - 2c + 7d$, въ которомъ на мѣсто $2c - 4c$, находившихся въ первомъ, должно поставить $-2c$; потому что вы-

читая 4c изъ количества, въ которомъ находится только 2c, надлежитъ означить, что слѣдуетъ еще вычесть 2c изъ суммы другихъ количествъ.

ПРИМѢРЪ.

Требуется сложить слѣдующія четыре количества.

$$5a + 3b - 4c$$
$$2a - 5b + 6c + 2d$$
$$a - 4b - 2c + 3e$$
$$7a + 4b - 3c - 6e$$

Сумма - - $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$

Дѣлая приведеніе, получаю въ буквахъ a, $15a$; въ b съ одной стороны $+7b$, а съ другой $-9b$, и слѣд. $-2b$ въ остаткѣ; въ c съ одной стороны имѣю $-9c$, а съ другой $+6c$, и слѣд. въ остаткѣ $-3c$; равнымъ образомъ приводя и другія количества, получаю наконецъ $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Количества, раздѣленныя между собою знаками + и —, называются *членами* тѣхъ количествъ, коихъ составляютъ части.

10. Количество называется *одночленнымъ*, *двучленнымъ*, *трехчленнымъ* и проч. судя потому, какъ оно состоитъ изъ 1 или 2 или 3 и проч. членовъ; количество же, состоящее изъ многихъ членовъ, коихъ число не опредѣляется, именуется вообще *многочленнымъ*.

11. Что касается до вычитанія Алгебраическихъ количествъ, то вотъ оному общее правило: *перемѣни всѣ знаки въ членахъ вычитаемаго, то есть, перемѣни* +

на —, а — на +; сложи напослѣдокъ количество, такимъ образомъ перемѣненное, съ уменьшаемымъ, и сдѣлай приведеніе.

ПРИМѢРЪ.

Изъ - - - - $6a - 3b + 4c$
требуется вычесть - - $5a - 5b + 6c$

Пишу - - - - $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$,
и по приведеніи, въ остаткѣ получаю $a + 2b - 2c$.

Дабы увѣриться въ истиннѣ сего правила, возмемъ примѣръ попростѣе. Положимъ, что изъ a надобно вычесть b, для сего стоитъ только написать $a - b$, и въ чемъ нѣтъ сомнѣнія; но когда изъ a требуется вычесть $b - c$, то должно написать, говорю я, $a - b + c$; ибо явствуетъ здѣсь, что не цѣлое b слѣдуетъ вычитать, но b, уменьшенное количествомъ c; слѣд. для вознагражденія отнятаго излишка, надлежитъ послѣ прибавить его; слѣд. c должно сложить, и написать такъ $a - b + c$, то есть, надлежитъ перемѣнить знаки во всѣхъ членахъ вычитаемаго.

12. Количества, предъ которыми стоитъ знакъ +, называются *положительными*; а тѣ, предъ которыми находится знакъ —, называются *отрицательными*. Въ послѣдствіи мы будемъ входить въ нѣкоторыя подробности о свойствѣ и употребленіи сихъ количествъ, разсматривая ихъ по особенности.

О Умноженіи.

13. Алгебраическое умноженіе требуетъ особливыхъ замѣчаній, какихъ не было по-

казано въ Ариѳметическомъ; ибо въ производствѣ его должно имѣть вниманіе не только на самыя количества, но и на знаки.

Впрочемъ разсматривая одни числительныя величины количествъ, представленныхъ буквами, надлежитъ имѣть то же понятіе объ Алгебраическомъ умноженіи, какое и объ Ариѳметическомъ; такъ на пр. умножить a на b, значитъ взять количество a столько разъ, сколько находится единицъ въ количествѣ b.

14. А какъ предметомъ поставляется въ Алгебрѣ дѣлать или представлять умноженіе независимо отъ числительной величины количествъ, то должно для сего согласиться въ знакахъ, которые бы показывали умноженіе.

Сверхъ знака ×, которымъ, какъ сказано въ Ариѳметикѣ, означается умноженіе, употребляется также точка, которая полагается между двумя умножаемыми количествами; такимъ образомъ $a \, . \, b$ и $a \times b$ значатъ одно.

Означается еще умноженіе (по крайней мѣрѣ въ одночленныхъ количествахъ) просто безъ поставленія знака между множимымъ и множителемъ. На примѣръ всѣ сіи три изображенія $a \times b$, $a \, . \, b$, ab показываютъ, что a должно умножить на b. Послѣднее есть самое употребительное.

15. И такъ при умноженіи ab на c, должно написать abc. Для умноженія ab на cd, напиши $abcd$, и такъ далѣе. Что касается до расположенія буквъ, то не нужно наблюдать въ немъ никакого порядка, потому что произведеніе выходитъ всегда одинаково, какимъ бы образомъ онѣ ни были умножены.

16. Изъ такого представленія одночленныхъ количествъ слѣдуетъ, *что произведеніе, выходящее изъ умноженія многихъ Алгебраическихъ одночленныхъ количествъ, должно содержать въ себѣ всѣ буквы какъ множимаго, такъ и множителя.*

17. Естьли умножаемыя количества состоятъ изъ одинакой буквы, то сія буква въ произведеніи должна написана быть столько разъ, сколько она находится во всѣхъ производителяхъ или факторахъ, какое бы впрочемъ число не было умножаемыхъ количествъ.

Такимъ образомъ a умноженное на a, должно бы дать въ произведеніи aa; aa умноженное на aaa должно бы дать $aaaaa$; равномѣрно aa умноженное на aaa и еще умноженное на a, должно бы дать $aaaaaa$.

Однакожъ въ семъ случаѣ согласились не повторять одинакой буквы, а писать ее одинъ разъ, и означать цыфрою, которая называется *показателемъ* и поставляется сверху надъ буквою вправо, сколько разъ

та буква бываетЪ производителемЪ, или сколько разЪ она должна быть написана.

Почему вЪ мѣсто aa должно написать a^2, вЪ мѣсто aaa напиши a^3; вЪ мѣсто $aaaa$ напиши a^4, и такЪ и проч.

Припомнимъ впередЪ, что *показатель буквы значитъ то, сколько разъ та буква бываетъ факторомъ въ приведеніи.*

ВЪ a^3b^2c находится три производителя разныхЪ величинЪ, именно a, b, c; но изЪ сихЪ буквЪ первая служитЪ сама три раза производителемЪ, вторая два, а третїя одинЪ разЪ; ибо a^3b^2c тоже значитЪ вЪ самомЪ дѣлѣ, что $aaabbc$.

18. Поелику показатель представляетЪ, сколько разЪ количество бываетЪ производителемЪ; слѣд. онЪ означаетЪ также вЪ какую степень количество возведено.

Почему показатель 5 вЪ a^5 значитЪ, что a возведено вЪ пятую степень.

19. И такЪ не надобно за одно принимать показателя сЪ коеффиціентомЪ, напримѣрЪ a^2 сЪ $2a$, a^3 сЪ $3a$; коеффиціентЪ 2 вЪ $2a$ показываетЪ, что a сложено сЪ a, то есть, что $2a$ равно $a + a$; но показатель 2 вЪ a^2 означаетЪ, что буква a должна быть написана два раза безЪ всякаго знака, что она умножена сама на себя, или наконецЪ, что она служитЪ производителемЪ два раза; то есть, a^2 то же, что $a \times a$, такЪ

что естьли бы a равно было на пр. 5, то $2a$ значило бы 10, но a^2 25.

20. Отсюда явствуетъ, *что при умноженіи двухъ количествъ одночленныхъ, имѣющихъ общія или одинакія буквы, можно сократить дѣйствіе сложеніемъ всѣхъ показателей подобныхъ буквъ какъ множимаго, такъ и множителя.*

Почему при умноженіи a^5 на a^3, пишу a^8, то есть, пишу букву a съ поставленіемъ надъ нею обоихъ показателей 5 и 3, сложенныхъ вмѣстѣ. Равнымъ образомъ при умноженіи a^3b^2c на a^4b^3cd, пишу $a^7b^5c^2d$, поставляя напередъ по порядку всѣ разны буквы $abcd$, и потомъ приписывая первой показателемъ 7, сумму показателей 3 и 4; второй 5 сумму двухъ показателей 2 и 3; а третьей 2 сумму двухъ показателей 1 и 1; хотя показатель буквы c и не означенъ, однакожъ онъ подразумѣвается 1, ибо c служитъ производителемъ одинъ разъ.

И такъ *показателемъ всякой буквы, надъ которой его не находится, разумѣть должно 1; и обратно во всякомъ случаѣ, когда буква должна имѣть показателемъ 1, можно не писать его.*

Правило сіе служитъ вообще для всѣхъ одночленныхъ количествъ.

21. Когда предъ одночленными количествами стоятъ цыфры, то есть, коеффиціенты; тогда должно начинать дѣлать умноженіе съ коеффиціентовъ, и такое умно-

женіе производить по Ариѳметическимъ правиламъ.

При умноженіи $5a$ на $3b$, умножаю сперва 5 на 3, потомъ a на b, и получаю $15ab$ въ произведеніи. Равнымъ образомъ при умноженіи $12a^3b^2$ на $9a^4b^3$, пишу $108a^7b^5$.

22. По предположеніи сихъ правилъ, приступимъ къ умноженію разнородныхъ количествъ. Въ производствѣ сего умноженія надлежитъ слѣдовать тому же порядку, какой показанъ былъ въ Ариѳметикѣ для чиселъ о многихъ цыфрахъ, то есть, надлежитъ умножать каждой членъ множимаго на каждой членъ множителя, наблюдая притомъ правила, предписанныя для одночленныхъ количествъ. Замѣтимъ еще, что здѣсь не бываемъ принуждены, какъ въ Ариѳметикѣ, дѣлать умноженіе съ правой руки къ лѣвой; въ Алгебрѣ все равно, съ правой ли къ лѣвой будешь умножать, или съ лѣвой къ правой: да мы и послѣдуемъ сему послѣднему способу, ибо онъ употребительнѣе.

ПРИМѢРЪ I.

Требуется умножить - - -	$a + b$
на - - - - - - - - - -	$c + d$
произведеніе - - -	$ac + bc + ad + bd$

1е. Множу a на c, что (14) дастъ ac. 2е. Множу b на c, и получаю bc. Складываю второе произведеніе съ первымъ, соединяя ихъ знакомъ $+$, и нахожу $ac + bc$ за произведеніе $a + b$ на c.

Умножаю равномѣрно a и b на d, отъ чего выходитъ $ad + bd$, а по соединенїи сего произведенїя съ предыдущимъ получаю $ac + bc + ad + bd$. Ибо множить $a + b$ на $c + d$ значитъ не только брать a, но и b столько разъ, сколько находится вообще единицъ въ $c + d$, то есть, столько разъ, сколько находится единицъ въ c, съ числомъ разъ, сколько ихъ есть въ d.

ПРИМѢРЪ II.

Требуется умножить - - -	$a - b$
на - - - - - - - - - -	$c - d$
Произведенїе - - - - -	$ac - bc - ad + bd$.

По умноженїи a на c, что дѣлаетъ ac, множу b на c, отъ чего выходитъ bc; но въ мѣсто, чтобъ складывать послѣднее произведенїе съ первымъ, я его вычитаю, потому что умножая цѣлое a, какъ дѣлалъ въ предыдущемъ примѣрѣ, умножаю въ немъ также и лишекъ количества b, которымъ a должно быть уменьшено; слѣд. должно отнять отъ ac количество b помноженное на c, то есть, отнять bc.

Равнымъ образомъ изъ умноженїя $a - b$ на d произойдетъ $ad - bd$; но какъ знакъ сего множителя есть $-$; то слѣдуетъ второе сїе произведенїе вычесть изъ перваго, что (11) сдѣлано будетъ такъ $ac - bc - ad + bd$.

Поелику множитель $c - d$ есть меньше цѣлаго c количествомъ d, то надлежитъ взять множимое столько разъ, сколько находится единицъ въ c по уменьшенїи его количествомъ d. Но ежели возмешь вдругъ $a - b$ столько разъ, сколько находится единицъ въ цѣломъ c, то безъ сумнѣнїя выдетъ произведенїе больше настоящаго величиною $a - b$, взятою столько разъ, сколько d имѣетъ въ себѣ единицъ; слѣд. надлежитъ вычесть произведенїе $a - b$ на d.

23. Естьли обратимъ вниманїе на знаки членовъ, составляющихъ цѣлое произвенїе $ac - bc - ad + bd$, и когда сравнимъ

ихъ съ знаками членовъ множимаго и множителя, то примѣтимъ 1.^{e} Что по умноженіи члена a съ знакомъ $+$ на членъ c съ знакомъ $+$, въ произведеніи выходитъ ac съ знакомъ $+$.

2.^{e} Что членъ b съ знакомъ $-$, умноженный на членъ c съ знакомъ $+$, даетъ въ произведеніи bc съ знакомъ $-$.

3.^{e} Что членъ a съ знакомъ $+$, помноженной на d съ знакомъ $-$, даетъ произведеніе ad съ знакомъ $-$.

4.^{e} Что наконецъ членъ b съ знакомъ $-$, умноженной на членъ d, которой также съ знакомъ $-$, даетъ въ произведеніи членъ bd съ знакомъ $+$.

И такъ дѣлая впередъ частныя умноженія, можемъ легко узнавать, какъ поступать съ особыми произведеніями, складывать ли ихъ, или вычитать; стоитъ для сего припомнить намъ два слѣдующія правила, которыя выходятъ изъ сдѣланныхъ теперь замѣчаній.

24. Когда оба умножаемые члена будутъ имѣть одинакіе знаки, то есть, будутъ оба съ $+$, или оба съ $-$, тогда произведеніе ихъ ставится всегда съ знакомъ $+$. Когдажъ напротивъ они будутъ съ разными

знаками, то есть, первой съ +, а другой съ —, или первой съ —, а второй съ +, тогда произведенie ихъ ставится всегда съ знакомъ —.

При помощи сихъ правилъ можемъ теперь дѣлать всякое Алгебраическое умноженie. И поступая методически, будемъ во первыхъ въ виду имѣть правило о знакахъ, потомъ о коеффицieнтахъ, наконецъ о буквахъ и показателяхъ.

ПРИМѢРЪ III.

Требуется умножить - - - $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

на - - - - - - - - - - $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$
\begin{array}{rrr}
5a^7 & -\ 2a^6b & +\ 4a^5b^2 \\
-\ 20a^6b & +\ 8a^5b^2 & -\ 16a^4b^3 \\
+\ 10a^4b^3 & -\ 4a^3b^4 & +\ 8a^2b^5
\end{array}
$$

Произведенie - - $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

25. Всякой, кто хочетъ утвердиться въ практикѣ сего правила, можетъ брать примѣры изъ таблицы, которая слѣдуетъ тотчасъ за дѣленieмъ; вотъ и замѣчанiя на нѣкоторыя изъ нихъ.

Въ первомъ умножена величина $a + b$, представляющая вообще сумму двухъ количествъ, на величину $a - b$, представляющую вообще разность ихъ, и въ произведенiи найдено $a^2 - b^2$, что изображаетъ разность квадрата перваго количества съ квадратомъ другаго, или разность квадратовъ двухъ количествъ. Слѣд. послѣ сего можно заключить вообще, что *изъ умноженiя суммы двухъ количествъ на разность ихъ, въ произведенiи выходитъ всегда разность квадратовъ тѣхъ же количествъ.* Возьмемъ какiя нибудь два чи-

сла, на пр. 5 и 3, сумма ихъ 8, а разность 2; по умноженіи сихъ чиселъ 8 и 2 между собою, въ произведеніи выходитъ 16, число, которое въ самомъ дѣлѣ представляетъ разность квадрата 5ти съ квадратомъ 3хъ, то есть, 25ти съ 9тью; и обратно *можно почитать всегда разность квадратовъ двухъ количествъ за произведеніе, вышедшее изъ умноженія суммы тѣхъ двухъ количествъ на разность ихъ.* Такимъ образомъ $b^2 - c^2$, разность квадрата b съ квадратомъ c, происходитъ изъ умноженія $b + c$ на $b - c$. Сіи два предложенія будутъ намъ весьма полезны со временемъ.

Можно по сему повстрѣчавшемуся съ нами случаю замѣтить, какъ Алгебра открываетъ всеобщія истинны.

Второй примѣръ показываетъ самымъ общимъ и простымъ образомъ то, что сказано было въ Ариѳметикѣ о составленіи квадрата, и именно: *квадратъ суммы* a + b *двухъ количествъ состоитъ изъ квадрата* a^2 *перваго, изъ удвоеннаго* 2ab *произведенія перваго количества на второе, и изъ квадрата* b^2 *втораго.*

Третій подтверждаетъ сказанное также въ Ариѳметикѣ о составленіи куба, то есть, что изъ умноженія $a^2 + 2ab + b^2$ квадрата изъ $a + b$ на тоже $a + b$ выходитъ кубъ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b$, котораго первой членъ представляетъ кубъ изъ a, второй тожъ, что $3a^2 \times b$ есть утроенное произведеніе квадрата a на b; равнымъ образомъ явствуетъ, что $3ab^2$ состоитъ изъ утроеннаго произведенія a на квадратъ b; наконецъ b^2 есть кубъ изъ b.

26. Для показанія умноженія между двумя разнородными количествами, заключается обыкновенно каждое изъ тѣхъ количествъ въ скобахъ, и полагается между ими какой нибудь изъ объявленныхъ (14) знаковъ, а иногда не полагается никакого. Для

означенія, что все количество $a^2 + 3ab + b^2$ должно быть умножено на $2a + 3b$, пишется $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, или $(a^2 + 3ab + b^2) \cdot (2a + 3b)$, или просто $(a^2 + 3ab + b^2)(2a + 3b)$. Иногда вмѣсто того, чтобъ заключать умножаемыя количества въ скобахъ, покрываютъ каждое изъ нихъ чертою такимъ образомъ: $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$.

27. Много встрѣчается случаевъ, гдѣ нужнѣе показывать умноженіе, нежели его дѣлать, хотя и не можно предписать именно когда такъ должно поступать; ибо сіе зависитъ отъ обстоятельствъ. Совсѣмъ тѣмъ въ послѣдствіи не преминемъ замѣтить такого рода случаевъ, а на сей разъ скажемъ довольно надежно, что умноженіямъ гораздо лучше дѣлать показаніе тогда, когда они бываютъ послѣдуемы дѣленіемъ, потому что послѣднѣе дѣйствіе, какъ увидимъ ниже, производится часто однимъ уничтоженіемъ производителей, общихъ дѣлимому и дѣлителю; общіе же сіи производители легче познаются при показаніи умноженія.

О Дѣленіи.

28. Способъ дѣлать дѣленіе зависитъ много отъ знаковъ, которые употреблены были при умноженіи; цѣль же его есть та, какая и въ Ариѳметикѣ.

29. Когда предлагаемое количество для дѣленія не имѣетъ никакой общей буквы съ дѣлителемъ, въ такомъ случаѣ не можно производить дѣйствія; все дѣло состоитъ въ показаніи, то есть, должно написать дѣлителя подъ дѣлимымъ въ видѣ дроби, раздѣливъ ихъ между собою чертою.

Для означенія, что a должно раздѣлить на b, пишется $\frac{a}{b}$ и выговаривается *а раздѣленное на b*; для показанія, что $aa + bb$ должно раздѣлить на $c + d$, пишется $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Естьли дѣлимое и дѣлитель состоятъ изъ одночленныхъ, и когда всѣ буквы, находящіяся въ дѣлителѣ, находятся также и въ дѣлимомъ; тогда дѣленіе производится самымъ дѣломъ по слѣдующему правилу: *уничтожь въ дѣлимомъ всѣ буквы, которыя найдутся одинаковы съ буквами дѣлителя; оставшіяся буквы представятъ частное.*

Для раздѣленія ab на a, уничтожаю a въ дѣлимомъ ab, и получаю b въ частномъ. Для раздѣленія abc на ab, уничтожаю ab въ дѣлимомъ, и получаю c въ частномъ.

Поелику (14) написанныя буквы безъ всякаго между ими знака, почитаются за производителей того количества, въ которомъ

они содержатся; слѣд. буквы дѣлителя, одинакія съ буквами дѣлимаго, должны быть производителями въ семъ дѣлимомъ. Но мы видѣли въ Ариѳметикѣ, что по раздѣленіи произведенія на какого нибудь изъ его факторовъ, въ частномъ выходитъ всегда другой факторъ; и такъ частное должно состоять изъ буквъ дѣлимаго, не подобныхъ буквамъ дѣлителя.

31. И такъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, что при дѣленіи такихъ количествъ, въ которыхъ будутъ находиться показатели, должно поступать по слѣдующему правилу, именно: *надлежитъ вычесть показателя каждой буквы дѣлителя изъ показателя одинакой буквы дѣлимаго.*

Для раздѣленія a^3 на a^2, вычитаю 2 изъ 3, въ остаткѣ 1, и слѣд. получаю a^1 или просто a въ частномъ. Равномѣрно по раздѣленіи $a^4 b^3 c^2$ на a^2bc, въ частномъ выходитъ $a^2 b^2 c$.

Ибо нѣтъ сомнѣнія, что $\frac{a^3}{a^2}$ тоже что $\frac{aaa}{aa}$; но сіе послѣднее изображеніе, по отнятіи общихъ буквъ у дѣлимаго, превращается (30) въ a.

32. Естьли въ дѣлимомъ и дѣлителѣ случатся общія буквы съ одинакими показателями, то по раздѣленіи выходятъ въ частномъ общія тѣ буквы съ показателемъ нуль.

Почему a^3 раздѣленное на a^3, дѣлаетъ a^0; а по раздѣленіи $a^3b\,c^2$ на $a^2b\,c^2$ выходитъ $a^1\,b^0\,c^0$, или ab^0c^0.

Можно въ семъ случаѣ не писать буквъ, имѣющихъ показателемъ o; ибо каждая изъ нихъ равна единицѣ. Истинна сего явствуетъ изъ того, что при дѣленіи a^3 на a^3 сыскивается, сколько разъ a^3 содержитъ въ себѣ a^3: но безъ сумнѣнія первое количество содержитъ въ себѣ второе 1 разъ, слѣд. частное должно состоять изъ 1; съ другой стороны по раздѣленіи a^3 на a^3 выходитъ a^0, слѣд. a^0 равно 1. По чему вообще *всякое количество съ показателемъ* о *равно* 1.

33. Естьли какія буквы дѣлителя не сходны съ буквами дѣлимаго, и при томъ нѣкоторые показатели дѣлителя превышаютъ показателей подобныхъ буквъ дѣлимаго; тогда въ точности не можно сдѣлать дѣленія, но производится оно показаніемъ, какъ было сказано (22). Можно однакожъ частное или дробное сіе количество представить въ простѣйшемъ видѣ. Правило, которому послѣдуютъ въ семъ случаѣ, велитъ уничтожить въ дѣлимомъ и дѣлителѣ общія буквы съ одинакими показателями; чтожъ касается до общихъ буквъ съ разными показателями, то замарывать или уничтожать одну толь-

ко ту, которая будетъ съ меньшимъ показателемъ, и уменьшать одинакимъ количествомъ показателя другой.

На примѣръ данное количество a^5bc^3 раздѣлить на $a^2b^3c^4$, напиши $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$, и послѣ приведи въ простѣйшій видъ такъ: замарай a^2 въ дѣлителѣ, и поставь только a^3 въ дѣлимомъ; уничтожь b въ дѣлимомъ, и напиши b^2 въ дѣлителѣ; наконецъ уничтожь c^3 въ дѣлимомъ, и напиши просто c въ дѣлителѣ; послѣ чего выходитъ $\frac{a^3}{b^2c}$. Равнымъ образомъ $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ по сокращеніи превращается въ $\frac{b^4c}{ad}$.

Когда по такомъ дѣйствіи не остается никакой буквы въ дѣлимомъ, тогда на мѣстѣ его ставится единица.

Почему $\frac{a^2}{a^3}$ приведено будетъ въ $\frac{1}{a}$.

Причину сего правила не трудно понять изъ вышесказаннаго; ибо уничтожать, какъ здѣсь предписывается, одинакое число подобныхъ буквъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, значитъ дѣлить на одно количество каждой членъ дроби, изображающей частное. Но такое дѣйствіе не перемѣняетъ величины дроби, а только что приводитъ ее въ простѣйшій видъ; сіе явствуетъ изъ Ариѳметики.

34. До сихъ поръ мы не обращали вниманія на коеффиціентовъ, коихъ могутъ

имѣть дѣлимое или дѣлитель, или оба вмѣстѣ. Правило, которому послѣдуютъ въ разсужденіи коеффиціентовъ, велитъ дѣлить ихъ также, какъ въ Ариѳметикѣ; когдажъ не можно сдѣлать дѣленія въ точности, то поставлять ихъ въ видѣ дроби, которую приводить въ простѣйшее значеніе, естьли возможно.

На примѣръ при раздѣленіи $8a^3b$ на $4a^2b$, дѣлю 8 на 4, и въ частномъ нахожу 2; дѣлю потомъ a^3b на a^2b, и въ частномъ получаю a; слѣд. $2a$ будетъ изображать цѣлое частное.

При раздѣленіи $8a^3b^2$ на $6ab$, пишу $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, и привожу въ $\frac{4a^2b}{3}$.

35. Предписанное (33) правило служитъ вообще какъ для такого дѣленія, въ которомъ дѣлимое съ дѣлителемъ состоятъ изъ одночленныхъ количествъ, такъ и для такого, въ которомъ они будутъ разнородныя или многочленныя, лишь бы въ семъ послѣднемъ случаѣ общія буквы дѣлимаго и дѣлителя были также одинаковы во всѣхъ членахъ, раздѣленныхъ знаками + и —.

На примѣръ при раздѣленіи $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ на $a^3 - 5a^2b$, частное $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$ приведено будетъ въ количество $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$ уничтоженіемъ a^2 общаго производителя во всѣхъ членахъ какъ дѣлимаго, такъ и дѣлителя.

36. Ежели дѣлимое съ дѣлителемъ будутъ разнородныя, то не можно предписать общихъ правилъ узнавать съ одного взгляду, сдѣлается ли дѣленіе въ точности или нѣтъ. Но чтобъ увѣриться въ этомъ и найти частное, то надлежитъ производить слѣдующее дѣйствіе.

1.^е^ Поставь въ одну строку дѣлимое съ дѣлителемъ и *расположи* члены ихъ относительно къ одной общей буквѣ, то есть, напиши члены по порядку величины ихъ тѣ, въ которыхъ одинакая буква будетъ имѣть показателей постепенно меньше.

2.^е^ Расположивъ такимъ образомъ, отдѣли дѣлимое отъ дѣлителя чертою, и приступай къ дѣленію, взявъ только первой членъ дѣлимаго, которой дѣли по предписаннымъ правиламъ (30 и слѣд.) на первой членъ дѣлителя; частное напиши подъ дѣлителемъ.

3.^е^ Умножъ попеременно найденнымъ частнымъ всѣ члены дѣлителя, и произведенія ихъ поднеси подъ дѣлимое, перемѣнивъ у всѣхъ знаки.

4.^е^ Подчеркни все, и сдѣлавъ приведеніе членамъ, которые найдутся подобными въ дѣлимомъ и произведеніи, напиши остатокъ

внизу, и начинай второе дѣленіе тѣмъ же порядкомъ, взявъ за первой членъ тотъ изъ оставшихся, которой будетъ имѣть большаго показателя.

Въ разсужденіи знаковъ, находящихся предъ членами дѣлимаго и дѣлителя, должно замѣтить здѣсь тоже правило, какое въ умноженіи, то есть . . .

Когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинакой знакъ, тогда частное выходитъ всегда съ знакомъ +.

Когдажъ напротивъ они будутъ съ противными знаками, тогда частное получаетъ знакъ —.

Сіе правило о знакахъ основывается на томъ, что по умноженіи частнаго на дѣлителя, въ произведеніи выходитъ дѣлимое. Слѣд. частное должно имѣть такіе знаки, чтобъ по умноженіи его на дѣлителя, выходило дѣлимое съ тѣми же знаками; а сіе допущеніе не минуемо утверждаетъ предписанное теперь правило.

Для наблюденія порядка, надлежитъ во первыхъ смотрѣть на знаки, потомъ дѣлить коеффиціенты, напослѣдокъ буквы.

ПРИМѢРЪ

Требуется раздѣлить $aa - bb$ на $b + a$.

Располагаю дѣлимое съ дѣлителемъ относительно къ той или другой буквѣ изъ двухъ a и b, на прим. относительно къ a; и пишу какъ слѣдуетъ.

$$\begin{array}{lrl} \text{Дѣлимое - - - - - -} & aa - bb & \Big\{ \begin{array}{l} a + b \ \text{Дѣлитель} \\ \hline a - b \ \text{Частное} \end{array} \\ & - aa - ab & \\ \hline \text{Остатокъ - - - - -} & - ab - bb & \\ & + ab + bb & \\ \hline \text{Остатокъ - - - -} & 0 & \end{array}$$

Поелику первые члены aa и a дѣлимаго и дѣлителя находятся съ знакомъ $+$, и потому въ частномъ должно поставить $+$; но какъ это начальной членъ, то можно знакъ сей и опустить.

Дѣлю aa на a; въ частномъ выходитъ a, которое пишу подъ дѣлителемъ.

Умножаю поперемѣнно оба члена a и b дѣлителя первымъ членомъ a частнаго, и подношу произведенія aa и ab подъ дѣлимое съ знакомъ $-$ противнымъ тому, какой вышелъ изъ умноженія; потому что произведенія сіи должно вычитать изъ дѣлимаго.

Дѣлаю приведеніе уничтоженіемъ aa и $-aa$; въ остаткѣ получаю $-ab$, которой съ остальною частію $-bb$ дѣлимаго, даетъ $-ab - bb$ то, что слѣдуетъ еще дѣлить.

Продолжаю дѣленіе, взявъ $-ab$ за первой членъ новаго дѣлимаго.

Дѣлю $-ab$ на a, и пишу въ частномъ $-$, потому что дѣлимое съ дѣлителемъ имѣютъ противные знаки; что жъ касается до буквы, то она должна быть b, которую пишу подлѣ перваго частнаго.

Умножаю оба члена a и b дѣлителя на членъ $-b$ частнаго, въ произведеніи выходитъ $-ab - bb$; перемѣнивъ знаки, пишу $+ab + bb$ подъ остальнымъ новымъ дѣлимымъ. Дѣлаю приведеніе уничто-

Примѣры Умноженія.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3 \\ \frac{3}{5}ab - 2b^2 \\ \hline \frac{2}{5}a^4b - \frac{12}{25}a^3b^2 + \frac{3}{10}ab^4 \\ - \frac{4}{3}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 - b^5 \\ \hline \frac{2}{5}a^4b - \frac{136}{75}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 + \frac{3}{10}ab^4 - b^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \hline 20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \\ - 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\ + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\ \hline 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \end{array}$$

Примѣры Дѣленія.

$$\begin{array}{r} a^3 - b^3 \\ - a^3 + a^2b \\ \hline + a^2b - b^3 \\ - a^2b + ab^2 \\ \hline + ab^2 - b^3 \\ - ab^2 + b^3 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a - b \\ \hline a^2 + ab + b^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 \\ - 8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 \\ \hline - 10a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 \\ + 10a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4a^2 + 5ab + b^2 \\ \hline 2a^2 - 3ab \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} a^4 + 2aabb + b^4 - c^4 \\ - a^4 - aabb - aacc \\ \hline + aabb - aacc + b^4 - c^4 \\ - aabb - b^4 - bbcc \\ \hline - aacc - bbcc - c^4 \\ + aacc + bbcc + c^4 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} aa + bb + cc \\ \hline aa + bb - cc \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 \\ - \frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 \\ \hline \frac{1}{6}ab - \frac{3}{20}b^3 \\ - \frac{1}{6}ab + \frac{3}{20}b^3 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\ \hline \frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \\ - 20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12a^2b^3 \\ \hline - 25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 \\ + 25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 \\ \hline + 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\ - 10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 \\ \hline 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\ \hline 4a^2 - 5ab + 2b^2 \end{array} \right.$$

женіемъ одинакихъ частей и противныхъ знаковъ: а какъ въ остаткѣ не выходитъ ничего, то заключаю, что частное есть въ точности $a - b$.

Можно равномѣрно расположить дѣлимое съ дѣлителемъ по буквѣ b: но въ такомъ случаѣ надлежало бы дѣлить $- bb + aa$ на $b + a$, и поступая такимъ же порядкомъ, какъ выше, нашли бы въ частномъ $- b + a$ количество равное $a - b$.

Смотри примѣры приложенной здѣсь таблицы.

37. Часто случается, что количество, выходящее послѣ многихъ разныхъ дѣйствій, можно поставить въ видѣ произведенія или результата, выходящаго изъ умноженія. Когдажъ сіе случается, то весьма часто нужнѣе представлять такіе результаты показаніемъ умноженія между его производителями. Хотя общій способъ для открытія сихъ производителей зависитъ отъ познаній, которыя сообщимъ послѣ; однакожъ познакомившись нѣсколько съ умноженіемъ и дѣленіемъ, можно и безъ тѣхъ свѣденій примѣтить ихъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ.

На примѣръ, естьли бы дано было сложить $5ab - 3bc + a^2$ съ $3ab + 3bc - 2a^2$, то вышло бы въ суммѣ $8ab - a^2$, количество, которое по причинѣ общаго фактора a въ обоихъ членахъ $8ab$ и a^2 можно почитать за произшедшее изъ умноженія $8b - a$ на a, и которое можно представить также въ видѣ $(8b - a) \times a$. Весьма нужно упражняться въ такомъ родѣ раздробленій количествъ на части,

О способѣ находить общаго большаго Дѣлителя двухъ буквальныхъ Количествъ.

38. Способъ находить общаго большаго дѣлителя для двухъ литтеральныхъ количествъ точно сходствуетъ съ показаннымъ въ Ариѳметикѣ для чиселъ. Надлежитъ, по расположеніи двухъ количествъ по какой нибудь одной буквѣ, дѣлить то, въ которомъ находится сія буква съ самымъ большимъ показателемъ на другое, и продолжать дѣленіе до тѣхъ поръ, пока самой большой показатель сдѣлается меньше, нежели какой находится во второмъ, или по крайней мѣрѣ ему равенъ. Потомъ дѣлить второе количество на остатокъ перваго дѣленія съ такимъ же наблюденіемъ. Второй сей остатокъ дѣлить на первой, и продолжать дѣлить новой остатокъ на предыдущей до тѣхъ поръ, пока дѣленіе сдѣлается въ точности; послѣдній дѣлитель будетъ общій самой большой дѣлитель.

Прежде нежели покажемъ правило сіе на самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ замѣчаніе, которое можетъ облегчить его употребленіе; замѣчаніе сіе состоитъ въ томъ, что общій дѣлитель двухъ количествъ отнюдъ не перемѣняется, когда одно изъ нихъ помножится

или раздѣлится на какое нибудь количество, не имѣющее общаго дѣлителя съ другимъ. На прим. ab и ac имѣютъ общимъ дѣлителемъ a; когдажъ ab умножу на d, то выдетъ изъ того abd, количество не имѣющее съ ac общаго другаго дѣлителя, кромѣ a, то есть, кромѣ того же, какой былъ между ab и ac. Но сего не можетъ выпти, когда умножу ab на количество, которое будетъ дѣлителемъ ac, или на количество имѣющее съ ac общаго производителя; на пр. естьли умножу ab на c, то выдетъ abc, котораго общій дѣлитель съ ac есть тоже ac. Равнымъ образомъ умноживъ ab на cd, количество, имѣющее общаго производителя съ ac, получу̀ $abcd$, коего общій дѣлитель съ ac есть также ac.

39. Заключимъ изъ сего 1.^{e} Ежели при изысканіи общаго большаго дѣлителя двухъ количествъ случится, что въ продолженіи дѣленія найдется въ дѣлимомъ или дѣлителѣ такой производитель или дѣлитель, которой не служитъ производителемъ другаго, въ такомъ случаѣ можно сократить сего производителя.

2.^{e} Можно умножать одно изъ двухъ количествъ на какое угодно число, лишь бы число сіе не было дѣлителемъ другаго, и не имѣло съ нимъ общаго производителя.

Здѣлаемъ теперь приноровку предписаннымъ правиламъ и замѣчанїямъ.

Положимъ, что требуется сыскать общаго большаго дѣлителя для $aa - 3ab + 2bb$ и $aa - ab - 2bb$.

ПРИМѢРЪ I.

1е. Дѣлимое	1й. Дѣлитель
$aa - 3ab + 2bb$	$aa - ab - 2bb$
$-aa + ab + 2bb$	1 - - - - - - - 1е. Частное
1й. Остатокъ $-2ab + 4bb$	

И такъ слѣдуетъ дѣлить $aa - ab - 2bb$ на $-2ab + 4bb$; но какъ сїе послѣднее количество имѣетъ производителемъ $2b$, которой не служитъ общимъ производителемъ во всѣхъ членахъ перваго, то стоитъ только раздѣлить $aa - ab - 2bb$ на $-a + 2b$, которое выходитъ по уничтоженїи производителя $2b$. Слѣд.

2е. Дѣлимое	2й. Дѣлитель
$aa - ab - 2bb$	$-a + 2b$
$-aa + 2ab$	$-a - b$ - - - 2е. Частное
$+ab - 2bb$	
$-ab + 2bb$	
Остатокъ - - - - - 0	

И такъ общїй дѣлитель есть $-a + 2b$.

ПРИМѢРЪ II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \Big\} \; 7a^2 - 23ab + 6b^2$$

Но какъ не можно дѣлить 5 на 7, и при томъ 7 не служитъ общимъ производителемъ во всѣхъ членахъ втораго количества, то умножаю первое на 7, и получаю . . .

1 е. Дѣлимое | 1 й. Дѣлитель
$35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ | $7a^2 - 23ab + 6b^2$
$-35a^3 + 115a^2b - 30ab^2$ | $5a$ - - - 1 е. Частное
1 й. Остат. $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$

Могу еще дѣлить остатокъ сей на тогоже дѣлителя, умноживъ его на 7, и опустивъ производителя b, то есть . . .

2е. Дѣлимое | 2й. Дѣлитель
$-77a^2 + 329ab - 294b^2$ | $7a^2 - 23ab + 6b^2$
$+77a^2 - 253ab + 66b^2$ | -11 - - 2е. Частное
2й. Остатокъ - - - $+76ab - 228b^2$

Теперь должно дѣлить $7a^2 - 23ab + 6b^2$ на $76ab - 228b^2$, или лучше на $a - 3b$, по уничтоженіи фактора $76b$. Слѣд.

3е. Дѣлимое | 3й. Дѣлитель
$7a^2 - 23ab + 6b^2$ | $a - 3b$
$-7a^2 + 21ab$ | $7a - 2b$ - - - 3е. Частное
$-2ab + 6b^2$
$+2ab - 6b^2$
Остатокъ - - 0

И такъ общій дѣлитель двухъ данныхъ количествъ будетъ $a - 3b$.

О буквальныхъ Дробяхъ.

40. Дроби въ буквахъ исчисляются по тѣмъ же правиламъ, по какимъ дроби въ числахъ, съ присовокупленіемъ къ нимъ правилъ, преподанныхъ выше для сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

41. Дробь $\frac{a}{b}$ можетъ превратиться безъ перемѣны величины своей въ $\frac{ac}{bc}$, или $\frac{aa}{ab}$, или $\frac{aa + ab}{ab + bb}$, и такъ далѣе.

Ибо сіи послѣднія дроби тоже значатъ, что и первая, которой оба члена помножены на c въ первомъ случаѣ, на a во второмъ и на $a + b$ въ третьемъ, что однакожъ не перемѣняетъ величины.

42. Дробь $\frac{aac}{abc}$ есть одинакова съ $\frac{a}{b}$; дробь $\frac{6a^3 + 3a^2b}{12a^3 + 9a^2c}$ равна $\frac{2a + b}{4a + 3c}$. Въ истиннѣ сего увѣриться можно раздѣленіемъ обоихъ членовъ первой на ac, а третей на $3a^2$. Впрочемъ приведеніе дробей въ простѣйшее ихъ значеніе явствуетъ также изъ сказаннаго (33).

Общее правило для сокращенія или представленія дроби въ малѣйшихъ числахъ состоитъ въ томъ, чтобъ дѣлить оба ея члена на общаго большаго дѣлителя.

43. Для приведенія количества, состоящаго изъ цѣлаго и дроби, въ одну дробь, надлежитъ, какъ было показано въ Ариѳметикѣ, умножить цѣлое на знаменателя дроби, при немъ находящейся.

На пр. $a + \frac{bd}{c}$ можетъ перемѣниться въ $\frac{ac + bd}{c}$.

Равнымъ образомъ $a + \frac{cd - ab}{b - d}$ превратится въ $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$ чрезъ помноженіе цѣлаго a на знаменателя $b - d$, а по сокращеніи въ $\frac{-ad + cd}{b - d}$, или $\frac{cd - ad}{b - d}$.

44. Выключка цѣлыхъ, содержащихся въ литтеральной дроби, дѣлается также, какъ въ Ариѳметикѣ; надлежитъ раздѣлить числителя на знаменателя, послѣдуя предписаннымъ для дѣленія правиламъ.

Почему количество $\frac{3ab + ac + cd}{a}$ можетъ приведено быть въ $3b + c + \frac{cd}{a}$; равнымъ образомъ количество $\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$ превращается въ $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$ чрезъ раздѣленіе на $a + 2b$.

45. Для приведенія многихъ буквальныхъ дробей къ одинакому знаменателю правило служитъ тоже, какъ въ Ариѳметикѣ.

И такъ, чтобъ привести слѣдующія три дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ къ одинакому знаменателю, множу оба члена первой на df, оба члена второй на bf, и оба члена третей на bd; отъ чего три дроби, приведенныя къ одинакому знаменателю, сдѣлаются $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Равнымъ образомъ поступать должно, когда числители или знаменатели дробей, или и тѣ и другія будутъ разнородныя количества, наблюдая однакожъ привила, предписанныя для умноженія разнородныхъ чиселъ.

На примѣръ двѣ дроби $\frac{b+c}{a+b}$ и $\frac{a-2c}{a-b}$, приведенныя къ одному знаменателю, превратятся въ $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ и $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ чрезъ умноженіе обоихъ членовъ первой на $a-b$, а второй на $a+b$.

46. Что принадлежитъ до сложенія и вычитанія дробей, то по приведеніи ихъ къ одному знаменателю, стоитъ только послѣ сложить или вычесть числителей ихъ, и подъ суммою или остаткомъ подписать общаго знаменателя.

Естьли двѣ дроби $\frac{b+c}{a+b}$ и $\frac{a-2c}{a-b}$, приведенныя къ одинакому знаменателю $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ и . . . $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, потребуется сложить, то сумма ихъ будетъ $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ или $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Когдажъ потребуется вторую вычесть изъ первой, то разность или остатокъ выдетъ $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, которой можно перемѣнить въ $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

47. Замѣтимъ, что при вычитаніи второй дроби изъ первой, одни только знаки числителя оной перемѣняются: но естьлибъ перемѣнены были знаки какъ у числителя, такъ и знаменателя, то сама дробь чрезъ то неперемѣнилась бы, и слѣд. вмѣсто вычитанія здѣлано было бы дѣленіе; ибо $\frac{a}{b}$ есть тоже, что $= \frac{-a}{-b}$ по правилу (36).

48. Для умноженія $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ напиши $\frac{ac}{bd}$, умноживъ числителя на числителя и знаменателя на знаменателя, какъ въ Ариѳметикѣ. Равнымъ образомъ изъ $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, выходитъ $\frac{1}{4}ab$.

49. Для дѣленія $\frac{a}{b}$ на $\frac{c}{d}$ дѣйствіе производится помноженіемъ $\frac{a}{b}$ на $\frac{d}{c}$, отъ чего въ частномъ выходитъ $\frac{ad}{bc}$; а чтобъ раздѣлить $\frac{a+b}{c+d}$ на $\frac{c+d}{a-b}$, умножъ $\frac{a+b}{c+d}$ на $\frac{a-b}{c+d}$; отъ чего произойдетъ $\frac{(a+b)}{(c+d)} \times \frac{(a-b)}{(c+d)}$ или $\frac{(a+b)\ (a-b)}{(c+d)^2}$, или по совершеніи умноженія, представленнаго въ числителѣ $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

О Уравненіяхъ или Эквацiяхъ.

50. Когда два количества равны, то они раздѣляются между собою симъ знакомъ $=$, которой произносится словами *равно*

или *равняется*; на примѣрѣ такое изображеніе $a = b$ произносится a равно b, или a равняется b.

Совокупность двухъ или многихъ количествъ, раздѣленныхъ между собою знакомъ $=$, называется *уравненіемъ*, или *эквацією*. Всѣ количества, находящіяся съ лѣвой стороны знака $=$, составляютъ *первую часть* уравненія; а тѣ, которыя находятся вправо *вторую часть*. Въ уравненіи $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ есть первая часть, а $2x + 7$ вторая. Уравненія находятся въ великомъ употребленіи при рѣшеніи вопросовъ, предлагаемыхъ о количествахъ.

Всякой вопросъ, разрѣшаемой Алгеброю, заключаетъ въ содержаніи своемъ явно или скрыто нѣкоторое число условій, посредствомъ которыхъ разсуждается объ отношеніяхъ неизвѣстныхъ количествъ съ извѣстными, отъ коихъ первыя зависятъ. Отношенія сіи могутъ, какъ мы то увидимъ со временемъ, представлены быть всегда уравненіями, въ которыхъ какъ неизвѣстныя, такъ и извѣстныя количества совокупляются между собою болѣе или мѣнѣе, глядя по трудности или легкости вопроса.

И такъ при рѣшеніи Алгебраическихъ вопросовъ, надлежитъ наблюдать три вещи.

1.е Выразумѣть изъ содержанія или свойства вопроса, какія находятся отношенія между извѣстными и неизвѣстными количествами. Способность сія пріобрѣтается, какъ и многія другія, чрезъ частое упражненіе, но нѣтъ особенныхъ для сего правилъ.

2.е Умѣть изображать каждое изъ отношеній уравненіемъ. Условіе сіе можетъ подлежать одному правилу, о которомъ предложимъ послѣ; но приноровка сего правила легче или труднѣе бываетъ глядя по свойству вопросовъ, по понятію и упражненію разрѣшающаго.

3.е Рѣшить уравненіе или уравненія, то есть, выводить изъ нихъ величину неизвѣстныхъ количествъ. Сей послѣдній пунктъ подлежитъ не опредѣленному числу правилъ, и съ него именно начнемъ.

Какъ разрѣшаемые вопросы могутъ представлены быть въ уравненіяхъ сложныхъ или не такъ сложныхъ, то уравненія сіи раздѣляются на многіе классы или степени, которыя различаются по показателю количе-

ства или количествѣ неизвѣстныхъ: мы покажемъ сложеннѣйшія со временемъ, а теперь займемся *уравненіями первой степени*. Симъ именемъ называются такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстныя количества не бываютъ умножены ни на самихъ себя, ни между собою.

Объ Уравненіяхъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

51. Рѣшить уравненіе значитъ приводить его въ другое, въ которомъ бы неизвѣстное количество, или буква его представляющая, находилось особо въ одной части, а въ другой все бы были одни извѣстныя.

Правилъ для рѣшенія уравненій первой степени, то есть, для приведенія ихъ въ такое состояніе, чтобъ неизвѣстное стояло особо въ одной части, находится числомъ три, которыя относятся къ тремъ различнымъ видамъ, смотря потому, какъ неизвѣстное можетъ перемѣшиваться или сопрягаться съ извѣстными количествами.

Неизвѣстныя количества представляются нѣкоторыми послѣдними Латинской Азбуки буквами x, y, z; а извѣстныя или числами, или первыми буквами.

52. Неизвѣстное совокупляется съ извѣстными количествами трояким образомъ: 1.е Чрезъ сложение или вычитание, какъ въ уравнении $x + 3 = 5 - x$. 2.е Чрезъ сложение, вычитание и умножение, какъ въ уравнении $4x - 6 = 2x + 16$. 3.е Наконецъ чрезъ сложение, вычитание, умножение и дѣление, какъ въ уравнении $\frac{2}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$, или чрезъ два послѣдния дѣйствия, или чрезъ послѣднее только одно.

Вотъ и правила для извлечения неизвѣстнаго количества, или, такъ сказать, отлучения его отъ извѣстныхъ во всѣхъ сихъ разныхъ случаяхъ.

53. *Для перестановки какого нибудь члена изъ одной части уравнения въ другую, надлежитъ зѣмарать или уничтожить его въ той, гдѣ онъ прежде былъ, и написать въ другой съ противнымъ знакомъ.* При чемъ должно помнить, что членъ, не имѣющий знака, почитается всегда за членъ съ знакомъ $+$.

На примѣръ въ уравнении $4x + 3 = 3x + 12$, желая переставить членъ $+ 3$ въ другую часть эквации, пишу $4x = 3x + 12 - 3$, гдѣ явствуетъ, что членъ 3 не находится уже въ первой части, но во второй съ знакомъ $-$, противнымъ прежнему $+$.

По приведении членовъ сего уравнения, превращается оно въ $4x = 3x + 9$; желая же теперь пере-

нести членъ $3x$ въ первую часть, пишу $4x - 3x = 9$, а по приведенiи $x = 9$.

Равномѣрно когда захочу въ эквацiи $5x - 7 = 21 - 4x$ переставить членъ $- 7$ во вторую часть; то напишу $5x = 21 - 4x + 7$, что превращается въ $5x = 28 - 4x$; напослѣдокъ желая переставить $- 4x$, напишу $5x + 4x = 28$, или по приведенiи $9x = 28$. Мы увидимъ скоро, какъ кончится рѣшенiе такого уравненiя.

Причину сего правила можно легко понять; поелику количества, составляющiя первую часть эквацiи, всѣ вмѣстѣ равны количествамъ второй части; то явствуетъ, что равенство ихъ не можетъ перемѣниться отъ того, когда прибавивъ въ одной части или убавивъ у нее какой нибудь членъ, прибавишь или убавишь равно тотъ же членъ въ другой: но при уничтоженiи члена съ знакомъ $+$, дѣлается самымъ дѣломъ уменьшенiе симъ членомъ въ той части, гдѣ онъ находился; слѣд. надлежитъ уменьшить и другую часть равнымъ количествомъ, то есть, написать въ ней тотъ же членъ съ знакомъ $-$. Напротивъ по уничтоженiи члена съ знакомъ $-$, выходитъ на самомъ дѣлѣ прибавка въ той части, гдѣ онъ находился; слѣд. надобно также прибавить и къ другой части равное количество, то есть, написать въ ней тотъ же членъ съ знакомъ $+$.

54. Изъ сего правила явствуетъ, что можно вдругъ переносить всѣ члены съ не-

извѣстнымъ количествомъ въ одну часть, и всѣ извѣстныя въ другую.

На примѣръ изъ экваціи $7x - 8 = 14 - 4x$, можно вдругъ вывести $7x + 4x = 14 + 8$, или $11x = 22$. Равномѣрно эквація $ax + bc - cx = ac + bx$ превращается въ $ax - cx + bx = ac - bc$.

55. При перестановкѣ членовъ можетъ случиться, что оставшіеся x послѣ приведенія найдутся съ знакомъ $-$; на пр. въ экваціи $3x - 8 = 4x - 12$ по перенесеніи всѣхъ x въ первую часть, выдетъ $3x - 4x = -12 + 8$, а по приведеніи $-x = -4$; въ такомъ случаѣ стоитъ только перемѣнить знаки въ обѣихъ частяхъ, почему въ настоящемъ примѣрѣ сдѣлается $+x = +4$ или $x = 4$. Ибо я могъ бы прежде перенести x во вторую часть, и здѣлать $-8 + 12 = 4x - 3x$, или $4 = x$; но это все равно, что $x = 4$.

56. Когда по перенесеніи всѣхъ неизвѣстныхъ членовъ въ одну часть и всѣхъ извѣстныхъ въ другую, не случится въ уравненіи дробей, тогда для сысканія величины неизвѣстнаго, надлежитъ здѣлать слѣдующее правило; *оставь неизвѣстное одно въ своей части, и здѣлай множителя его дѣлителемъ въ другой части извѣстныхъ количествъ.*

На примѣръ въ эквацїи $7x - 8 = 14 - 4x$, которую разбирали выше, нашли по переставкѣ и приведенїи членовъ $11x = 22$; слѣд. чтобъ узнать величину x, должно написать $x = \frac{22}{11}$, что превратится въ $x = 2$; то есть, должно написать x одно въ своей части, а множителя его 11 здѣлать дѣлителемъ 22 во второй. Ибо когда вмѣсто $11x$ напишу только x, въ такомъ случаѣ беру только одиннадцатую часть изъ первой части эквацїи; слѣд. для сохраненїя равенства долженъ также написать оную одиннадцатую часть и во второй части уравненїя, то есть, раздѣлить вторую его часть на 11.

Равнымъ образомъ въ данной эквацїи $12x - 15 = 4x + 25$, по переставкѣ членовъ найдется $12x - 4x = 25 + 15$, или по приведенїи $8x = 40$; по томъ чтобъ сыскать величину x, напишу $x = \frac{40}{8}$, отъ чего выдетъ $x = 5$.

Естьли извѣстныя количества, умножающїя x, будутъ вмѣсто чиселъ представлены буквами, то правило и тутъ служитъ тоже.

На примѣръ въ эквацїи $ax = bc$ для сысканїя величины x, надобно написать $x = \frac{bc}{a}$.

Когда по переставкѣ найдется много членовъ съ неизвѣстнымъ, то правило и для сего остается тоже.

На примѣръ желая узнать величину x въ эквацїи $ax + bc - cx = ac - bx$, которую разсматривали выше, и которую по переставкѣ членовъ перемѣнили въ $ax - cx + bx = ac - bc$, должно напи-

сать $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$, то есть, написать одинЪ x вЪ своей части, и здѣлать количество $a - c + b$, умножившее x, дѣлителемЪ др гой части; поелику $ax - cx + bx$ происходитЪ изЪ умноженія x на $a - c + b$.

Равномѣрно изЪ экваціи $ax = bc - 2x$ по переставкѣ выходитЪ $ax + 2x = bc$, и слѣд. по предписанному правилу дѣленія будетЪ $x = \frac{bc}{a + 2}$. Уравненіе $x - ab = bc - ax$ по переставкѣ членовЪ обращается вЪ $x + ax = bc + ab$, и слѣд. презЪ раздѣленіе вЪ $x = \frac{bc + ab}{1 + a}$; ибо не должно забывать, что множитель перваго x вЪ части $x + ax$ есть 1, потому что $x + ax$ происходитЪ изЪ умноженія x на $1 + a$.

57. Для превращенія экваціи сЪ знаменателями вЪ другую, вЪ которой бы ихЪ не находилось, *надлежитъ умножитъ каждой членЪ, не имѣющій знаменателя, на произведеніе всѣхЪ знаменателей; потомЪ умножить также числителя каждой дроби на произведеніе знаменателей прочихъ дробей.*

На примѣрЪ вЪ данной экваціи $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, умножу числителя $2x$ дроби $\frac{2x}{3}$ на 35, произведеніе двухЪ знаменателей 5 и 7, отЪ чего произойдетЪ $70x$; умножу членЪ 4, не имѣющій знаменателя, на 105 произведеніе всѣхЪ трехЪ знаменателей 3, 5 и 7, отЪ чего выдетЪ 420; умножу числителя $4x$ дроби $\frac{4x}{5}$ на 21, произведеніе двухЪ

знаменателей 3 и 7, и получу $84x$; умножу членъ 12, не имѣющїй знаменателя, на 105 произведенїе всѣхъ трехъ знаменателей 3, 5 и 7, и получу 1260; наконецъ умножу числителя $5x$ дроби $\frac{5x}{7}$ на 15, произведенїе двухъ прочихъ знаменателей 3 и 5, и получу $75x$. Такимъ образомъ предложенная эквацїя перемѣнится въ слѣдующую $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, въ которой, чтобъ опредѣлить x, стоитъ только здѣлать два предыдущїя правила. По первому правилу (53) сїя эквацїя перемѣнится въ $7x - 84x + 75x = 1260 - 420$, а по второму (56) въ $x = \frac{840}{61}$; наконецъ по совершенїи дѣленїя выдетъ $x = 13\frac{47}{61}$.

Въ истиннѣ правила сего можно легко увѣриться, припомнивъ сказанное въ Ариѳметикѣ о приведенїи многихъ дробей къ одинакому знаменателю.

Ибо въ данной эквацїи $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$ для приведенїя трехъ дробей $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$ къ одному знаменателю, надлежитъ умножить числителей ихъ на тѣ же числа, на какїя и настоящее правило предписываетъ множить, и дать новымъ симъ числителямъ общимъ знаменателемъ произведенїе всѣхъ знаменателей; отъ чего предыдущая эквацїя превратится въ такую другую $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, которая въ сущности

остается таже, потому что новыя дроби равны прежнимъ. Но когда захочемъ привести также и цѣлыя въ дробь, то должно умножить сіи цѣлыя на знаменателя дроби, при нихъ находящейся, какъ здѣсь на 105, состоящаго изъ произведенія всѣхъ знаменателей, заключающихся въ уравненіи; послѣ чего выдетъ $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$; но безъ сумнѣнія равенство сіе не уничтожится и по уничтоженіи въ обѣихъ частяхъ эквацій общаго знаменателя; ибо когда два количества раздѣленныя равны, то они должны быть равны и нераздѣленныя; слѣд. эквація $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$ должна равняться предыдущей.

58. Естьли разные члены, составляющіе эквацію, будутъ всѣ литтеральныя количества, то и тутъ правило остается тоже; только надобно прибавить къ сему то, что предписано для умноженія литтеральныхъ количествъ.

На примѣръ въ эквацій $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, множу числителя ax на произведеніе dc двухъ прочихъ знаменателей, и получаю $acdx$; множу членъ $+ b$ на произведеніе bdc всѣхъ знаменателей и нахожу $+ b^2dc$; множу cx на bc и нахожу bc^2x; наконецъ множу ab на bd, и получаю ab^2d, отъ чего эквація перемѣнится въ $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, а сія по переставкѣ членовъ въ $acdx - bc^2x = ab^2d -$

b^2cd, и напослѣдокъ чрезъ раздѣленіе (56) въ $x = \frac{a^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

59. Естьли знаменатели будутъ разнородныя количества, то можно для легкости представлять напередъ дѣйствія показаніемъ, потомъ производить ихъ.

На примѣръ въ данномъ уравненіи $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$ прежде напишу $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$; послѣ чего совершивъ показанныя такимъ образомъ дѣйствія, получу $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$, по переставкѣ $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; наконецъ по раздѣленіи (56) $x = \frac{4b^3 + ab^2 - 2a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Примѣры на предыдущія Правила, состоящіе изъ нѣкоторыхъ простыхъ Вопросовъ.

60. Изъясненныя правила довольно достаточны къ рѣшенію всякаго вопроса, представленнаго уравненіемъ первой степени. Для представленія же вопроса уравненіемъ, надобно употреблять слѣдующее правило: *Изобрази искомое количество или количества каждое особенною буквою, и разсмотрѣвъ со вниманіемъ содержаніе вопроса, произведи посредствомъ Алгебраическихъ знаковъ надъ тѣми количествами и количествами извѣстными та-*

кія же дѣйствія и разсужденія, какія бы ты произвелъ, знавши величины неизвѣстныхъ для повѣрки ихъ.

Хотя сіе правило есть общее, и можетъ руководствовать къ представленію всѣхъ вопросовъ уравненіями; однакожъ не безполезно приноровку его показать на самомъ дѣлѣ.

Вопросъ первой. *Изъ двухъ мортиръ пущено* 100 *бомбъ: изъ первой* 40 *больше другой; спрашивается, сколько изъ каждой пущено?*

Съ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣтить, что вопросъ сей перемѣняется въ слѣдующій: сыскать два количества, которыя бы вмѣстѣ составляли 100, и изъ которыхъ одно превосходило бы другое числомъ 40. Но явствуетъ, что какъ скоро будетъ извѣстно одно количество, то будетъ извѣстно и другое; ибо естьли бы я зналъ, на примѣръ большое, то стоило бы только для опредѣленія меньшаго вычесть изъ него 40.

И такъ представляю большое количество чрезъ x.

Узнавши величину x, для повѣрки нахожу меньшее вычитая изъ него 40; по томъ складываю большое съ меньшимъ, и смотрю, составляютъ ли они вмѣстѣ 100. Станемъ, подражая сему, производить на самомъ дѣлѣ.

Большое число - - - - - - x

Меньшое - - - - - - - - $x - 40$

Сумма ихъ - - - - - - - $2x - 40$

Но по условію вопроса,

сумма сія должна составлять - - - - 100

Слѣд. - - - - - - - $2x - 40 = 100$.

Чтобъ опредѣлить величину x въ семъ уравненіи, стоитъ только употребить данныя правила (53 и 56). По первому выдетъ $2x = 100 + 40$ или $2x = 140$, а по второму $x = \frac{140}{2} = 70$; сыскавши большое x, вычту изъ него 40, и получу 30 за меньшое. Почему искомыя два числа будутъ 70 и 30.

Разсматривая способъ, по которому поступали мы при рѣшеніи сего вопроса, ясно можно видѣть, что употребленныя нами разсужденія ни мало не зависятъ отъ особенныхъ величинъ чиселъ 100 и 40, находящихся въ вопросѣ, и что дѣлопроизводство останется одинаково, хотя бы въ мѣсто сихъ чиселъ даны были совсѣмъ другія. На примѣръ естьлибъ вопросъ былъ данъ вообще такимъ образомъ: *Сыскать два числа, коихъ сумма и разность извѣстны; сумма представлена чрезъ a, а разность чрезъ b*, то - - -

Положимъ большое	- - - -	x
Слѣд. меньшое будетъ	- - - -	$x - b$
Сумма ихъ	- - - - - - -	$2x - b$

Но по вопросу сумма сія должна составлять a; слѣд. $2x - b = a$.

По перестановкѣ $2x = a + b$, и по раздѣленіи $x = \frac{a+b}{2}$, или $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

То есть, для сысканія большаго числа надлежитъ взять половину a, и сложить ее съ половиною b; это научаетъ, что по извѣстной суммѣ a двухъ чиселъ и разности ихъ b, большое находится чрезъ сложеніе полсуммы съ полразностію.

Поелику меньшое число представляетъ $x - b$, то оно должно быть равно $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, или по приведеніи всего въ дробь $\frac{a+b-2b}{2}$, то есть, $\frac{a-b}{2}$ или $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; слѣд. для сысканія меньшаго должно

изъ половины a вычесть половину b, то есть, изъ полсуммы вычесть полразность.

Отсюда явствуетъ, какимъ образомъ, представляя извѣстныя количества данныхъ вопросовъ буквами, находимъ общія правила для рѣшенія всѣхъ другихъ вопросовъ одинаковаго свойства.

Часто случается, что вопросы, при первомъ на нихъ взглядѣ, кажутся различными; но по разсмотрѣніи примѣчаемъ, что они различествуютъ между собою въ одномъ только оборотѣ выраженія. На примѣръ возмемъ въ разсужденіе сей вопросъ.

Раздѣлить извѣстное число и представленное чрезъ a на двѣ части, изъ коихъ бы одна была меньше или больше другой извѣстнымъ количествомъ, представленнымъ чрезъ b. Легко примѣтить можно, что сей вопросъ одного свойства съ предыдущимъ.

Вопросъ второй. *Надобно раздѣлить 720 канонеровъ на три отряда такъ чтобъ въ первомъ было 80, а во второмъ 40 человѣкъ больше послѣдняго; спрашивается, изъ какого числа каждой отрядъ долженъ состоять?*

Естьлибъ мнѣ извѣстно было число послѣдняго отряда, то я повѣрилъбы такъ: придалъбы къ нему сперьва 40, и нашелъбы число втораго; потомъ 80, и нашелъбы число перваго отряда; наконецъ всѣ три числа сіи сложилъбы вмѣстѣ, и получилъбы за сумму ихъ 720.

И такъ представивъ число послѣдняго отряда чрезъ x, и разсуждая такимъже образомъ на самомъ дѣлѣ, получимъ . . . .

Число третьяго или меньшаго отряда - - -	x
слѣд. число средняго будетъ - - - -	$x + 40$
а большаго - - - - - - - - - - -	$x + 80$
Сумма - - - - - - - - - - - -	$3x + 120$
должна составлять по условію вопроса - - - -	720

Слѣд. $3x + 120 = 720$.

По предписаннымъ правиламъ найдется $3x = 720 - 120$, или $3x = 600$, и слѣд. $x = 200$; почему среднее число будетъ состоять изъ 240, а большое изъ 280; сумма сихъ трехъ чиселъ въ самой вещи даетъ 720.

И здѣсь понять не трудно, что данной вопросъ можетъ рѣшиться такимъ же образомъ, хотя бы вмѣсто данныхъ чиселъ 720, 40 и 80 приняты были совсѣмъ другія. И такъ при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ, которыми предлагается раздѣлить извѣстное число a на три части такія, изъ которыхъ бы большая превосходила меньшую извѣстнымъ количествомъ b, а средняя туже меньшую количествомъ c, разсуждать будемъ такъ:

Представимъ меньшое чрезъ - - -	x
Среднее - - - - - - - - - - - -	$x + c$
Большое - - - - - - - - - - - - -	$x + b$
Сумма ихъ - - - - - - - - - - - -	$3x + b + c$
должна составлять - - - - - - - - - -	a

Слѣд. $3x + b + c = a$

По переставкѣ $3x = a - b - c$, и по раздѣленіи $x = \frac{a - b - c}{3}$.

То есть, для опредѣленія меньшаго количества надлежитъ вычесть изъ числа, которое предлагается раздѣлить, оба излишества, и изъ остатка взять треть; послѣ чего два прочія количества найдутся безъ всякаго труда. И такъ для рѣшенія даннаго вопроса раздѣлимъ 642 на три части такія, изъ которыхъ средняя превосходитъ меньшую 75тью, а большая меньшую 87мью, сложу два излишества 75 и 87, сумма ихъ будетъ 162; вычту 162 изъ 642, въ остаткѣ получу 480, коего треть 160 будетъ меньшая часть. Слѣд. двѣ прочія будутъ 160 + 75 или 235, и 160 + 87 или 247.

Вопросъ третій. *Раздѣлить 14250 патроновъ на три деташемента, которыя содержатся между собою, какъ числа 3, 5 и 11, то есть, первой ко второму = 3 : 5, и опять первой къ третьему = 3 : 11?*

Естьлибъ мнѣ извѣстно было число людей какого нибудь деташемента, на примѣръ перваго, то вотъ какъбы я повѣрилъ.

Сыскалъбы по тройному правилу число, которое содержится къ сему первому = 5 : 3, и оно показало бы мнѣ число втораго деташемента; по томъ сыскалъбы другое число, которое содержится къ тому же первому = 11 : 3, и оно представило бы людей третьяго деташемента; сложивъ всѣ три числа вмѣстѣ, получилъбы за сумму ихъ 14250. Начнемъ поступать по сему разсужденію.

Положимъ первое число - - - - - - x

Для опредѣленія втораго, сыщу четвертой членъ въ сей пропорціи $3 : 5 = x$:

онъ будетъ - - - - - - - $\frac{5x}{3}$

Для опредѣленія третьяго, сыщу четвертой членъ въ пропорціи $3 : 11 = x$,

которой будетъ - - - - - - - - - $\frac{11x}{3}$.

Сумма сихъ чиселъ есть $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, или $x + \frac{16x}{3}$.

Но по условію вопроса сумма сія должна составлять 14250; слѣд. $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Для опредѣленія x уничтожаю (57) знаменателя 3, и получаю $3x + 16x = 42750$, или $19x = 42750$; слѣд. раздѣливъ на 19 (56), буду имѣть $x = \frac{42750}{19}$

$= 2250$. Почему вторая часть, изображенная чрезъ $\frac{5x}{3}$, будетъ $\frac{5 \times 2250}{3}$, или $\frac{11250}{3}$, или 3750; а третья, представленная чрезъ $\frac{11x}{3}$, будетъ $\frac{11 \times 2250}{3}$, или $\frac{24750}{3}$, или 8250; сумма сихъ частей составляетъ дѣйствительно 14250, и притомъ содержаніе между числами 2250, 3750, 8250 находится такое же, какое между 3, 5 и 11; въ этомъ удостовѣряемся раздѣленіемъ трехъ первыхъ числъ на 750, ибо такое дѣленіе ни мало не перемѣняетъ содержанія.

И вообще, естьли данное для дѣленія число 14250 изобразится чрезъ a, а пропорціональныя части 3, 5, 11 чрезъ буквы m, n, p; то при рѣшеніи должно поступать по предыдущему разсужденію.

Почему, представивъ первую часть чрезъ x, для полученія второй, найду четвертой членъ въ пропорціи $m : n = x$:

Сей четвертой членъ, или вторая часть будетъ $\frac{nx}{m}$.

А для опредѣленія третей, сыщу четвертой членъ въ пропорціи $m : p = x$:

Сей четвертой членъ, или третья часть будетъ $\frac{px}{m}$.

Слѣд. сумма сихъ трехъ частей изобразится чрезъ $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, или $x + \frac{nx + px}{m}$; но сумма сія должна составлять a; почему $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

По уничтоженіи знаменателя выходитъ $mx + nx + px = ma$, а по раздѣленіи $x = \frac{ma}{m + n + p}$. Сей результатъ заставляетъ насъ замѣтить, како Алгебра открываетъ общія правила въ исчисленіяхъ

Ибо явствуетъ изъ Ариѳметики, что при вычисленiи четвертаго члена въ пропорцiи, коей первыми тремя будутъ $m + n + p : m = a$, сей четвертый членъ долженъ быть $\frac{am}{m + n + p}$; а какъ нашли мы, что x изображаетъ одинакое количество, то заключимъ, что для определенiя x надлежитъ сыскать четвертой членъ въ пропорцiи, коей первымъ будетъ сумма пропорцiональныхъ частей, вторымъ первая изъ техъ частей, а третьимъ число, которое должно разделить; но это точно сходствуетъ съ Ариѳметическимъ правиломъ для вопросовъ такогожъ свойства.

Вопросъ четвертой. *Велено выступить Артиллерiйскому отряду въ походъ изъ Тулы въ Кiевъ съ предписанiемъ итти ему въ сутки по 16 верстъ; на другой день другому отряду изъ Москвы въ следъ за первымъ, полагая 24 версты итти ему на день; спрашивается, на какой версте последнiй отрядъ догонитъ первой? Известно притомъ, что Тула находится отъ Москвы разстоянiемъ во 182 верстахъ.*

Естьли мне сказано будетъ, на какой версте второй отрядъ догонитъ первый, то стану поверять такимъ образомъ. Сыщу сначала, сколько долженъ пройти верстъ первой до соединенiя съ нимъ втораго; а какъ пути ихъ одного времени должны содержаться пропорцiонально скоростямъ, то есть, пропорцiонально числу верстъ, предписанныхъ итти каждому на день, то определю число пройденныхъ верстъ первымъ чрезъ посылку 24 : 16, такъ пройденная дорога вторымъ къ дороге перваго. Сыскавши четвертой членъ въ сей пропорцiи, сложу его съ 16, тѣмъ числомъ верстъ, которое прошелъ первый отрядъ за день впередъ, и со 182 разстоянiемъ отъ Москвы до Тулы, которое также у него было впереди; сумма должна равняться числу верстъ, которое нужно пройти второму отряду до соединенiя. Станемъ поступать по сему разсужденiю, положивъ x за число пройденныхъ верстъ вторымъ отрядомъ.

Естьли Московской отрядъ пройдетъ число верстъ x, то въ тоже время Тульской долженъ пройти - - - - - - - - - $\frac{16}{24}x$, или $\frac{2}{3}x$.

Впередъ за день - - - - - - - - - 16
Разстояніе отъ Москвы до Тулы - - - 182

Но сумма трехъ послѣднихъ количествъ $\frac{2}{3}x + 198$ .. должна равняться пути втораго отряда до соединенія съ первымъ; слѣд. $\frac{2}{3}x + 198 = x$, и по предыдущимъ правиламъ будетъ $x = 594$, то есть, отряды соединятся между собою на 594 верстѣ отъ Москвы.

Ибо во время переходу 594 верстъ вторымъ отрядомъ, первой долженъ пройти 396, потому что онъ идетъ по 16 верстъ, а второй по 24 на день; но онъ за то имѣетъ 16 верстъ впереди за день и 182 версты, разстояніе отъ Москвы до Тулы, которое какъ бы имъ уже было пройдено; слѣд. онъ долженъ быть также на 594 верстѣ отъ Москвы, то есть, въ одномъ мѣстѣ со вторымъ отрядомъ.

Съ малѣйшимъ вниманіемъ примѣтить можно, что при перемѣнѣ чиселъ даннаго вопроса, порядокъ рѣшенія и заключеній не можетъ перемѣниться. Представимъ вообще чрезъ a разстояніе 182 верстъ между двумя мѣстами, изъ которыхъ назначенъ походъ; чрезъ b число дней, которое впереди имѣетъ первый отрядъ въ разсужденіи втораго; чрезъ c число верстъ предписанное итти на день первому; и чрезъ d число верстъ, предписанное итти на день второму.

Наконецъ положивъ x за то число верстъ, какое долженъ перейти второй отрядъ до соединенія съ первымъ, поступаю какъ выше.

Опредѣляю путь перваго отряда посылкою $d : c = x$: онъ будетъ состоять изъ $\frac{c \times x}{d}$, или просто

изъ $\frac{cx}{d}$. Но поелику предположили мы, что первой отрядъ долженъ итти число c верстъ на день; слѣд. онъ пройдетъ въ число b дней $c \times b$ или bc верстъ, то есть, въ 8 разъ больше, естьли b равно 8, въ 30 разъ больше, естьли b равно 30; вообще онъ долженъ пройти столько, сколько находится единицъ въ bc: слѣд. онъ прошелъ количество, изображенное чрезъ bc.

Сложу теперь число верстъ $\frac{cx}{d}$ съ числомъ bc и съ числомъ верстъ a; сумма $\frac{cx}{d} + bc + a$ покажетъ путь втораго отряда до соединенія его съ первымъ; но мы положили его x; слѣд. $x = \frac{cx}{d} + bc + a$. Изъ сего уравненія вывожу $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, а по сему послѣднему заключаю о рѣшеніи всѣхъ вопросовъ такого свойства, въ которыхъ предполагается, что оба отряда выступаютъ въ походъ къ одному мѣсту, и что отрядъ, которой идетъ медленнѣе, отходитъ напередъ.

Для показанія употребленія сей формулы, возвратимся къ предыдущему примѣру и припомнимъ, что a представляетъ 182 версты, $b = 1$ дню, $c = 16$ верстамъ, $d = 24$ верстамъ; слѣд. вся величина x изобразится чрезъ $x = \frac{1 \times 16 \times 24 + 182 \times 24}{24 - 16}$, то есть, чрезъ $x = \frac{384 + 4368}{8} = 594$, какъ выше.

На примѣръ, естьли будетъ данъ сей другой вопросъ: *Часовая стрѣлка стоитъ на 17 минутѣ, а минутная на 24ой, то есть, часы показываютъ 3 ч. 21'; спрашивается, въ которомъ часу и минутѣ сойдутся обѣ стрѣлки вмѣстѣ?*

Поелику предполагается здѣсь, что часовая и минутная стрѣлки идутъ въ одно время, то количе-

ство b, которымъ представили мы прежде, чѣмъ предшествующій походъ одного отряда противъ другаго, здѣсь равно нулю. Разстояніе двухъ мѣстъ, откуда начинаютъ итти стрѣлки, изображается здѣсь тѣмъ пространствомъ, которое нужно минутной стрѣлкѣ пробѣжать съ 24 раздѣленія часоваго круга до 17, то есть, $a = 53$ раздѣленіямъ; но во время, какъ минутная стрѣлка пробѣгаетъ 60 раздѣленій, часовая проходитъ ихъ только 5, слѣд. $c = 5$, $d = 60$. Поелику $b = 0$, то уничтожаю въ формулѣ $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ членъ bcd, или $b \times cd$, потому что изъ умноженія всякаго числа на нуль выходитъ нуль. И такъ въ настоящемъ случаѣ величина x изобразится чрезъ $x = \frac{ad}{d - c}$; вставивъ въ мѣсто a, d, c величины ихъ, получу $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57 \frac{45}{55} = 57 \frac{9}{11}$; то есть, надлежитъ минутной стрѣлкѣ пройти 57 раздѣленій и $\frac{9}{11}$; а какъ она стояла на 24 раздѣленій, то въ то время, какъ догонитъ часовую, будетъ отвѣчать уже 81 раздѣленію и $\frac{9}{11}$, или по причинѣ, что 60 раздѣленій составляютъ цѣлой кругъ, обѣ стрѣлки должны сойтися на 21 $\frac{9}{11}$ слѣдующаго часу, то есть, пятаго.

Преимущество литтеральныхъ рѣшеній надъ числовыми состоитъ не только въ томъ, что для опредѣленія искомыхъ количествъ всякаго особаго вопроса, стоитъ только вставить въ мѣсто буквъ долженствующія представлять ихъ числа; но и еще часто посредствомъ нѣкотораго приуготовленія выражаются сіи рѣшенія такъ просто и легко, что можно ихъ во всякомъ случаѣ припомнить. На примѣръ, найденную формулу $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ можно представить въ настоящемъ случаѣ чрезъ $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$,

потому что d служитъ общимъ факторомъ обоимъ членамъ числителя. Но не трудно примѣтить подъ симъ видомъ формулы, что величина x происходитъ четвертымъ членомъ пропорціи, въ которой тремя первыми служатъ $d - c : d = a + bc$; между сими тремя членами первой $d - c$ показываетъ разность скоростей двухъ отрядовъ, второй d означаетъ скорость втораго отряда, а третій $a + bc$ состоитъ изъ разстоянія a двухъ мѣстъ, откуда назначенъ походъ, и изъ количества bc или $c \times b$, означающаго, сколько первый отрядъ уходитъ верстъ въ число дней, данныхъ ему впередъ; такъ что $a + bc$ показываетъ все то разстояніе, которое имѣетъ впереди первой отрядъ; и слѣд. рѣшеніе предложеннаго вопроса можетъ выражено быть такъ: *умножь путь, совершаемый въ день первымъ отрядомъ, на число дней, данныхъ ему впередъ, и произведеніе сложивъ съ разстояніемъ двухъ мѣстъ, изъ которыхъ назначенъ походъ, здѣлай слѣдующее тройное правило*: какъ разность скоростей двухъ отрядовъ содержится къ скорости втораго, такъ сумма означенныхъ выше двухъ чиселъ къ четвертому члену: сей четвертой членъ покажетъ, какое число верстъ нужно пройти второму отряду до соединенія съ первымъ. Такимъ образомъ въ предыдущемъ примѣрѣ должно, (сложивъ 16 верстъ съ 182, разстояніемъ между двумя городами, изъ коихъ идутъ въ походъ отряды, отъ чего въ суммѣ выходитъ 198), сыскать четвертой членъ въ пропорціи $24 - 16 : 24 = 198$: или $1 : 3 = 198$; сей четвертой членъ будетъ такой же, какъ выше, 594.

Разсужденія о положительныхъ и отрицательныхъ Количествахъ.

61. Выведенныя такимъ образомъ общія формулы для рѣшенія всѣхъ вопросовъ одного свойства, можно не рѣдко употреблять и для рѣшенія другихъ, коихъ условія совсѣмъ противны первымъ. Часто довольно для сего бываетъ одной перемѣны въ знакахъ $+$ на

—, или — на +. Но прежде нежели познакомимся съ симъ новымъ употребленіемъ знаковъ, разсмотримъ ихъ въ новомъ видѣ.

Буквы представляютъ совершенную величину количествъ. Знаки + и — представляли доселѣ однѣ только дѣйствія сложенія и вычитанія; но они могутъ представлять также во многихъ случаяхъ взаимное отношеніе количествъ между собою.

Можно разсматривать одно и тоже количество въ двухъ противныхъ видахъ, или какъ способное увеличить какое нибудь другое количество, или уменьшить его. Пока количество сіе представлять будетъ какая нибудь буква или число, ничто не можетъ означить, въ какомъ видѣ оно принимается. На примѣръ въ положеніи человѣка, имѣющаго на себѣ столько долгу, сколько имѣнія, можетъ одно и тожъ число служить къ означенію числовой величины того и другаго состоянія; совсѣмъ тѣмъ число сіе, какое бы въ прочемъ ни было, не можетъ показать разности между долгомъ и имѣніемъ. Самое натуральное средство дать почувствовать сію разность, заставляетъ изображать знаками противныя ихъ дѣйствія; а какъ долги уменьшаютъ имѣніе, то поставляется предъ ними знакъ —.

Равномѣрно разсматривая прямую линѣю (*фиг.* 1) какъ произшедшую изъ перпендикулярнаго движенія точки A къ линѣѣ BC, не трудно увѣриться, что точка A могла простираться какъ отъ A къ D, такъ и отъ A къ E; естьли представимъ здѣланной ею путь AD или AE чрезъ *a*, то симъ не означимъ еще совершеннаго положенія той точки. Для опредѣленія же его надобенъ знакъ, которой бы показалъ, какъ должно принимать *a*, въ право или въ лѣво: но знаки + и — служатъ равно и для сего дѣйствія; ибо разсматривая движеніе точки A относительно къ точкѣ L, извѣстной и принимаемой за постоянной предѣлъ, понимаемъ, что путь ея къ D долженъ увеличить LA, а путь ея къ E уменьшить LA; и такъ неоспоримо слѣдуетъ представить AD чрезъ + *a*, или просто чрезъ *a*; и напротивъ AE чрезъ — *a*. Относя же движеніе точки A не къ L, но къ O, противно предыдущему поступать надобно.

И такъ отрицательныя количества столько же существенны, какъ и положительныя; и разнятся съ ними въ томъ только, что принимаются противно въ исчисленіяхъ.

Положительныя количества могутъ находиться въ исчисленіяхъ, и часто нахо-

дятся перемѣшаны съ отрицательными не только для того, что по нѣкоторымъ дѣйствіямъ принуждены бываемъ вычитать одни количества изъ другихъ; но и еще потому, что не рѣдко требуетъ нужда представить въ рѣшеніи разные виды, въ которыхъ пріемлются количества.

Впрочемъ, въ какомъ бы видѣ не принимали мы отрицательныя количества, предписанныя правила для разныхъ дѣйствій остаются отъ того не меньше одинаковы, въ чемъ можемъ увѣриться еще больше по слѣдующимъ разсужденіямъ.

69. Естьли по разрѣшеніи вопроса случится неизвѣстная величина, найденная по выше предписаннымъ правиламъ, отрицательною; на примѣръ, естьли случится притти до такого результата $x = -3$, то должно заключить, что количество, означенное чрезъ x, имѣетъ совсѣмъ противныя свойства тѣмъ, которыя предположены рѣшеніемъ. На примѣръ слѣдующій вопросъ: *найти такое число, которое бы съ 15 равнялось* 10, будетъ безъ сомнѣнія не возможной. Представивъ искомое число чрезъ x, получимъ уравненіе $x + 15 = 10$, и слѣд. въ силу предыдущихъ правилъ $x = 10 - 15$, или $x = -5$. Сіе послѣднее

заключеніе показываетъ, что количество x не такова свойства, въ какомъ мы его принимали; ибо не складывать его съ 15, но вычитать изъ 15 должно. И такъ всякое отрицательное рѣшеніе, означая нѣкоторое ложное предположеніе въ смыслѣ вопроса, показываетъ въ тожъ время и поправку, то есть, показываетъ, что искомое количество должно принимать въ противномъ свойствѣ.

63. Заключимъ изъ сего, что естьли по разрѣшеніи вопроса, гдѣ нѣкоторые количества были принимаемы въ извѣстномъ смыслѣ, захотимъ послѣ перерѣшить его, принявъ тѣже количества въ другомъ противномъ свойствѣ; то для такого перерѣшенія стоитъ только перемѣнить знаки, находящіеся при тѣхъ количествахъ. На примѣръ, естьли рѣшивши вообще четвертый вопросъ, въ которомъ предполагается, что два отряда идутъ къ одной сторонѣ, захотимъ послѣ имѣть формулу для рѣшенія вопросовъ такого свойства, гдѣ бы предполагалось, что оба отряда идутъ другъ другу на встрѣчу; то для сего надлежитъ перемѣнить въ найденной величинѣ $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ знакъ, стоящій предъ c. Въ самомъ дѣлѣ, поелику первой отрядъ идетъ на встрѣчу второму, то слѣд. онъ не удаляется отъ

него, но сокращаетъ путь его, и сокращаетъ путь сей пропорціонально собственному своему пути c, которой онъ совершаетъ въ часъ или въ день; слѣд. должно изобразить c не прибавляющимъ, но убавляющимъ количествомъ; слѣд. въ мѣсто $+ c$ надлежитъ поставить $- c$. Послѣ такой перемѣны выходитъ $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, потому что перемѣнивъ знакъ количества c въ членѣ $+ bcd$, которой происходитъ изъ $+ bd \times + c$, надлежитъ послѣ написать . . . $+ bd \times - c$, а изъ сего (24) происходитъ $- bcd$. Ибо знакъ $-$ количества c означаетъ по данному понятію, что $- c$ должно быть употреблено противно количеству c съ знакомъ $+$; но какъ въ предыдущемъ случаѣ c показывало, сколько разъ должно сложить bd, слѣд. въ настоящемъ будетъ показывать, сколько разъ должно его вычесть, и потому въ произведеніи выходитъ $- bcd$. И такъ вообще, (какъ скоро отрицательныя количества принимаются противно положительнымъ, и сія разность полагается въ знакахъ двухъ противныхъ дѣйствій), должно быть по необходимости то, что для однихъ служитъ сложеніемъ, для другихъ вычитаніемъ, и на оборотъ; такъ что ежели a безъ b, даетъ въ остаткѣ $a - b$, то a безъ $- b$ должно по необхо-

димости равняться $a + b$. Явствуетъ также, что по изъяснении всего сообразно данному понятію объ отрицательныхъ количествахъ, оба сіи дѣйствія премѣняются одно въ другое при переходѣ отъ положительныхъ количествъ къ отрицательнымъ, и обратно, сохраняя, собственно сказать, одно названіе; ибо по одному только сходству говоримъ, что изъ a должно вычесть $-b$.

Подтвердимъ примѣромъ все то, что сказали мы о употребленіи перемѣнъ въ знакахъ при рѣшеніи вопросовъ съ противными условіями. Положимъ, что два курьера поѣхали другъ другу на встрѣчу изъ разныхъ мѣстъ, разстояніемъ на 400 верстъ: первой поѣхалъ 7мью часами прежде втораго и ѣдетъ въ часъ 8 верстъ, а другой въ часъ 12 верстъ; спрашивается, гдѣ они встрѣтятся? Назвавъ x путь втораго курьера до встрѣчи его съ первымъ, заключаю, что количество x должно равняться разности между всѣмъ разстояніемъ и дорогою перваго курьера; но путь сего состоитъ во первыхъ изъ той дороги, которую онъ можетъ проѣхать въ 7 часовъ, и еще изъ той, которую проѣдетъ во время пути втораго курьера. Сія послѣдняя дорога опредѣлится посылкою 12 : 8, или $3 : 2 = x :$ и слѣд. будетъ равняться $\frac{2x}{3}$; а поелику первой курьеръ долженъ еще переѣхать 56 верстъ лишнихъ противъ втораго въ 7 часовъ, которые у него впереди; слѣд. вся его дорога будетъ состоять изъ $56 + \frac{2x}{3}$; и такъ для пути втораго остается количество $400 - 56 - \frac{2x}{3}$, или $344 - \frac{2x}{3}$; слѣд. $x = 344 - \frac{2x}{3}$: изъ сей экваціи выходитъ $x = \frac{1032}{5} = 206\frac{2}{5}$. Естьли вставится въ формулѣ

$x = \frac{ad - bcd}{d - c}$, которая, какъ доказано выше, должна рѣшить сей случай, 400 за a, 7 за b, 12 за d и 8 за c, то выдетъ также $x = 206 \frac{2}{5}$.

Въ послѣдствіи не преминемъ познакомить больше съ отрицательными количествами.

64. Поелику весьма нужно умѣть выводить уравненія изъ данныхъ вопросовъ, то для навыку обучающихся присовокупляемъ къ предыдущимъ задачамъ нѣсколько другихъ довольно легкихъ съ отвѣтами, которые послужатъ повѣркою ихъ опытамъ. По разрѣшеніи сихъ вопросовъ числами, совѣтуемъ послѣ рѣшить ихъ въ буквахъ; ибо съ производствомъ особенныхъ сихъ рѣшеній увеличиваются и распространяются понятія.

Сыскать такое число, которое придано будучи порознь къ 5 и 12, даетъ двѣ суммы, находящіяся между собою, какъ 3:4? - - - - - - отвѣтъ 16.

Сыскать такое число, которого половина треть и $\frac{2}{5}$ сложены будучи вмѣстѣ, превосходятъ тоже число 7мью? - - - - - - - - - - - - - отвѣтъ 30.

Спрашивается, во сколько времени сработать могутъ 100 аршинъ сукна три ткача, изъ которыхъ первой договорился ткать въ недѣлю 5 аршинъ, второй 7, а третій 8? - - - - - отвѣтъ въ 5 недѣль.

Нѣкто нанялъ лѣниваго работника по 24 копѣйки за каждой рабочей день съ условіемъ, вычитать изъ заслуженныхъ имъ денегъ по 6 копѣекъ за каждой нерабочій. По прошествіи 30 дней здѣланъ расчетъ, и ра-

ботникъ не получилъ ничего; спрашивается, сколько дней онъ работалъ? - - - - - Отвѣтъ 6 дней.

Дровяникъ при поставкѣ дровъ въ нѣкоторое мѣсто получилъ всего барыша 135 рублей, а по ращету капитала 10 на 100; спрашивается, чего стоили дрова ему самому? - - - - - - - - Отвѣтъ 1350 рублей.

Нѣкто платилъ долгъ въ 15 сроковъ, увеличивая каждой послѣдующій платежъ одинакимъ количествомъ; въ первой срокъ внесено 7 рублей, а въ послѣдній 37 руб. Спрашивается, чѣмъ увеличивались платежи? - - - - - - - - Отвѣтъ $2\frac{1}{7}$ рублями.

Въ нѣкоторой огнестрѣльной составъ положено на 8 фунтовъ селитры 1 фун. сѣры; спрашивается, сколько надобно прибавить въ него еще селитры, чтобъ на 9 фунтовъ смѣси доставалось по 4 унціи сѣры? - - -
Отвѣтъ 27 фунтовъ.

Объ Уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными.

65. Въ вопросахъ, коими требуется опредѣлить нѣсколько неизвѣстныхъ, способъ представлять уравненія остается тотъ же, какой и въ тѣхъ, гдѣ предлагается узнать одно неизвѣстное. Но вообще должно дѣлать столько уравненій, сколько можно вывести ихъ изъ условій даннаго вопроса. Естьли всѣ условія различны и не зависятъ одно отъ другаго, равно какъ каждое можно изобразить особымъ уравненіемъ, то такой вопросъ не можетъ имѣть кромѣ одного рѣшенія, памятуя при томъ тогда только, когда всѣ

сіи уравненія будутъ первой степени, и число ихъ равно числу неизвѣстныхъ количествъ. Но естьли нѣкоторое изъ условій будетъ заключаться явно или скрытно въ какомъ нибудь другомъ, или естьли число условій будетъ меньше числа неизвѣстныхъ; то уравненій будетъ меньше, чѣмъ неизвѣстныхъ, и вопросъ въ такомъ случаѣ можетъ имѣть безчисленное множество рѣшеній, по крайней мѣрѣ до тѣхъ поръ, пока какое нибудь особое условіе, котораго однакожъ не можно представить въ уравненіи, не ограничитъ числа ихъ. Все это изъяснимъ примѣрами.

Допустимъ сначала два уравненія съ двумя неизвѣстными. Хотя предписанныя правила для уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ служатъ равно и для уравненій со многими неизвѣстными; однакожъ для эквацій съ двумя неизвѣстными должно присовокупить еще слѣдующее.

66. *Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожъ неизвѣстнаго, поступая какъ бы все прочее было извѣстно: сравни обѣ сіи величины, чрезъ то получишь новую такую эквацію, въ которой останется одно только второе*

неизвѣстное, которое опредѣли по предыдущимъ правиламъ. Сыскавъ сіе второе неизвѣстное, поставъ величину его въ какомъ нибудь уравненіи перваго дѣйствія; чрезъ то получишь другое неизвѣстное.

На примѣръ, естьли даны будутъ двѣ слѣдующія экваціи $2x + y = 24$; $5x + 3y = 65$. Изъ первой вывожу $x = \frac{24 - y}{2}$, изъ второй $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

Сравниваю обѣ величины x, и пишу $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$ уравненіе, въ которомъ остается одно только второе неизвѣстное y, и изъ котораго, по правиламъ уравненій съ однимъ неизвѣстнымъ, выходитъ $y = 10$.

Для опредѣленія x, вставливаю въ мѣсто y величину его 10 въ первой величинѣ количества x, найденной выше (можно равнымъ образомъ вставить ее и во второй). По вставкѣ получаю $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

67. Возьмемъ для втораго примѣра два уравненія $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, и $\frac{2}{3} x + \frac{3}{4} y = 19$.

Привожу во первыхъ эти уравненія въ слѣдующія два другія (57) $24x - 25y = 60$, и $8x + 9y = 228$.

По томъ изъ перваго получаю - - $x = \frac{60 + 25y}{24}$

Изъ втораго - - - - - $x = \frac{228 - 9y}{8}$,

Сравнивъ двѣ величины x, вывожу $\frac{60+25y}{24} = \frac{228-9y}{8}$ эквацію, въ которой кромѣ y другаго неизвѣстнаго не находится, и по которой заключаю, что $y = 12$.

Для опредѣленія x, ставлю вмѣсто y величину его 12 въ той, или другой величинѣ x; на примѣръ въ первой, именно въ $x = \frac{60+25y}{24}$; послѣ чего получаю $x = \frac{60+25\times12}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

68. Возьмемъ для третьяго примѣра два такія уравненія $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, и $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Начинаю уничтоженіемъ знаменателей (57), и получаю

$$56x = 35x + 60y - 1260$$
$$\text{и } 56x - 20y = 35y - 420$$

Изъ перваго вывожу $x = \frac{60y-1260}{21}$

Изъ втораго - - $x = \frac{55y-420}{56}$.

Сравнивъ обѣ величины x, нахожу $\frac{60y-1260}{21} = \frac{55y-420}{56}$ эквацію, изъ которой получаю $y = 28$.

Для опредѣленія величины x, вставливаю въ прежде найденномъ уравненіи $x = \frac{60y-1260}{21}$ вмѣсто y величину его 28; отъ чего происходитъ - - - $x = \frac{60\times28-1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$.

69. Возмемъ двѣ литтеральныя экваціи $ax - by = c$ и $dx + fy = e$, въ которыхъ a, b, c, d, e, f означаютъ извѣстныя положительныя или отрицательныя количества.

Первая даетъ $x = \frac{c - by}{a}$; вторая $x = \frac{e - fy}{d}$.

Сравнивъ обѣ величины x, получимъ $\frac{c - by}{a} = \ldots \frac{e - fy}{d}$; по уничтоженіи дробей и по перестановкѣ членовъ выходитъ $afy - bdy = ae - cd$, а изъ сей $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Для опредѣленія величины x надлежитъ вставить въ какомъ нибудь прежнемъ уравненіи, на примѣръ въ $x = \frac{c - by}{a}$, въ мѣсто y величину его $\frac{ae - cd}{af - bd}$; послѣ чего произойдетъ $x = \frac{c - b \times \frac{ae - cd}{af - bd}}{a}$, или по приведеніи c въ дробь $x = \frac{\frac{afc - bcd - abe + bcd}{af - bd}}{a}$, или $x = \frac{afc - abe}{aaf - abd}$, или наконецъ (33) $x = \frac{fc - be}{af - bd}$.

70. До сихъ поръ предполагали мы вездѣ, что оба неизвѣстныя находятся въ каждомъ уравненіи; когдажъ этаго не случится, то рѣшеніе не только не перемѣнится, но еще здѣлается простѣе.

На примѣръ, естьли даны будутъ двѣ такія экваціи $5ax = 3b$, и $cx + dy = e$; то изъ первой выве-

ду $x = \frac{3b}{5a}$, изъ второй $x = \frac{e - dy}{c}$. Сравнивъ двѣ величины x, получу $\frac{7b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$; по уничтоженіи знаменателей, по переставкѣ членовъ и по приведеніи найду $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

О Уравненіяхъ первой степени съ тремя и большимъ числомъ неизвѣстныхъ.

71. Выразумѣвши надлежащимъ образомъ все сказанное, не трудно понять, какъ должно поступать съ большимъ числомъ уравненій и неизвѣстныхъ.

Предположивъ, что вопросъ содержитъ въ себѣ столькожъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ, допустимъ на примѣръ, что онъ заключаетъ въ себѣ три уравненія съ тремя неизвѣстными; то для рѣшенія такого вопроса - - - *Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожъ неизвѣстнаго, какъ бы все прочее было извѣстно; сравни потомъ первую величину со второю и съ третьею, или сравни первую со второю, а вторую съ третьею, отъ чего произойдетъ двѣ экваціи съ двумя неизвѣстными, съ которыми поступай по правилу* (66).

Пусть для примѣра будутъ даны три слѣдующія уравненія - - - $3x + 5y + 7z = 179$.
$8x + 3y - 2z = 64$.
$5x - y + 3z = 75$.

Изъ перваго вывожу $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$

Изъ втораго - - $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$

Изъ третьяго - $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$

Сравнивъ первую величину x со второю, получаю $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$

Сравнивъ ту же первую величину x съ третьею, получаю $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$

А какъ въ обоихъ послѣднихъ уравненїяхъ находится только два неизвѣстныя, то поступаю по правилу (66).

Беру въ каждой изъ двухъ эквацїй величину y; въ первой получаю $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, во второй $y = \frac{670 - 26z}{28}$

Сравниваю обѣ величины y, и вывожу $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$ уравненїе съ однимъ неизвѣстнымъ, котораго величина есть $z = \frac{13950}{930} = 15$.

Для опредѣленїя y, вставливаю въ найденной выше эквацїи $y = \frac{1240 - 62z}{31}$ въ мѣсто z величину его 15, и получаю $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Напослѣдокъ для опредѣленія x, вставливаю въ какой нибудь изъ означенныхъ выше трехъ величинъ сего количества вмѣсто y и z величины ихъ 10 и 15, на примѣръ, вставливаю въ $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$, которая и превращается въ $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Естьли каждое неизвѣстное не будетъ заключаться въ каждомъ уравненіи, то рѣшеніе здѣлается отъ того легче, однако въ точности сходствуетъ съ предыдущими.

На примѣръ, естьли дано будетъ рѣшить три уравненія $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, и $3x + 4z = 57$, то - - -

Изъ перваго вывожу $x = \frac{65 - 3y}{5}$; во второмъ не находится величины x; въ третьемъ $x = \frac{57 - 4z}{3}$; слѣд. должно сравнить только двѣ величины x, и по тому получаю $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$ эквацію, въ которой не заключается больше x, и которую сравнивъ со второю $2y - z = 11$ по правиламъ уравненій съ двумя неизвѣстными, опредѣлю y и z. По окончаніи выкладки найду $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

72. Изъ предыдущаго явствуетъ, что сколько бъ не было уравненій, общее правило для рѣшенія ихъ остается одинаково, именно ... *Выведи въ каждомъ уравненіи величину одного и тогожъ неизвѣстнаго; сравни какую нибудь изъ сихъ величинъ со всѣми прочими, чрезъ что уничтожишь одну*

экваціюˮ и одно неизвѣстное. Поступая съ остальными уравненіями также, какъ прежде, получишь еще уравненій и неизвѣстныхъ единицею меньше. Продолжай поступать такъ до тѣхъ поръ, пока наконецъ дойдешь до одного неизвѣстнаго.

73. Не безполезно, думаю, будетъ помѣстить здѣсь еще другой способъ для опредѣленія величины неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ первой степени.

На примѣръ, двѣ экваціи $3x + 4y = 81$ и $3x - 4y = 9$ могутъ рѣшиться иначе такимъ образомъ. Естьли вычтешь вторую изъ первой, то произойдетъ $8y = 72$, и слѣд. $y = \frac{72}{8} = 9$; а когда сложишь ихъ между собою, то получишь $6x = 90$, и слѣд. $x = \frac{90}{6} = 15$. Изъ сего примѣра замѣтимъ, какъ легко рѣшить два такія уравненія, въ которыхъ коэффиціенты сходныхъ неизвѣстныхъ будутъ одинаковы.

А чтобъ привести уравненія въ такое состояніе, то должно умножить одно изъ нихъ на приличное число. И вотъ какимъ образомъ находится это число, на примѣръ, въ данныхъ двухъ экваціяхъ $4x + 3y = 65$, и $5x + 8y = 111$.

Представляю чрезъ m искомое число, и умножаю имъ какую нибудь изъ эквацій, на примѣръ вторую; отъ чего происходитъ $5mx + 8my = 111m$. Складываю ее съ первою, и получаю $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$; эту послѣднюю можно написать такъ $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Теперь, чтобъ уничтожить x, стоитъ только положить за m такое число, чтобъ $4 + 5m = 0$; и

слѣд. $m = -\frac{4}{5}$. Сїе положенїе превращаетъ уравненїе въ $(3 + 8m)\,y = 65 + 111m$, изъ котораго выходитъ $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$, такое другое, которое, естьли поставишь въ немъ за m величину его, перемѣнится въ $y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7$.

Но для уничтоженїя y, надлежитъ за m положить такое число, чтобъ $3 + 8m = 0$; то есть, надлежитъ приравнять къ нулю коэффицїента или множителя y; и слѣд. получимъ $m = -\frac{3}{8}$. Положенїе сїе превращаетъ эквацїю въ $(4 + 5m)\,x = 65 + 111m$, изъ которой выходитъ $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$ такое уравненїе, которое, по вставкѣ за m найденной величины его $-\frac{3}{8}$, даетъ $x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11$.

Естьли дано будетъ рѣшить три уравненїя съ тремя неизвѣстными, въ такомъ случаѣ должно умножить второе на число m, а третїе на число n; и сложивъ ихъ такимъ образомъ умноженныя съ первымъ, положить коэффицїента каждаго умноженнаго неизвѣстнаго равнымъ нулю. Для опредѣленїя m и n получишь двѣ эквацїи, съ которыми поступай, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Возмемъ для примѣра три прежнїя уравненїя $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$. Умноживъ второе на m, а третье на n, и сложивъ ихъ съ первымъ, получу $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$ эквацїю, которую можно изобразить такъ,

$(3 + 8m + 5n)\,x + (5 + 3m - n)\,y + (7 - 2m + 3n)$
$z = 179 + 64m + 75n$.

Естьли захочу узнать z, то положу $3 + 8m + 5n = o$ и $5 + 3m - n = o$; отъ чего эквацїя перемѣнится въ $(7 - 2m + 3n)\,z = 179 + 64m + 75n$, а изъ сей выдетъ $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; теперь стоитъ только опредѣлить m и n, а сїе здѣлай посредствомъ двухъ показанныхъ уравненїй $3 + 8m + 5n = o$ и $5 + 3m - n = o$, съ которыми поступай, какъ въ предыдущемъ случаѣ; то есть, умножь вторую эквацїю на число p и сложи ее съ первою, отъ чего произойдетъ $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = o$, которую изобрази такъ: $3 + 5p + (8 + 3p)\,m + (5 - p)\,n = o$; а чтобъ получить n, то положи $8 + 3p = o$, и эквацїя перемѣнится въ $3 + 5p + (5 - p)\,n = o$, изъ которой происходитъ - - - $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; но эквацїя $8 + 3p = o$ даетъ $p = -\frac{8}{3}$, слѣд. $n = \frac{31}{23}$. Производя дѣйствїе такимъ же образомъ, получишь $m = -\frac{28}{23}$; наконецъ вставивъ величины сїи въ величинѣ z, найдешь $z = 15$. Не трудно понять изъ сего производства, какъ должно поступать, естьлибъ вмѣсто z потребовалось опредѣлить x или y; но какъ скоро найдется одно изъ неизвѣстныхъ количествъ, то безполезно начинать вновь такуюжъ выкладку для остальныхъ другихъ, потому что можно опредѣлить ихъ посредствомъ вставки величины сего неизвѣстнаго въ данныя уравненїя, отъ чего число ихъ единицею уменьшится; и слѣд. прочїя величины можно опредѣлить, производя такое рѣшенїе, какое было показано въ предыдущемъ примѣрѣ для двухъ эквацїй.

Примѣры на предыдущія правила для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, заключающихъ въ себѣ нѣсколько неизвѣстныхъ.

74. Вопросъ I. *Дано два сорта ядеръ: шесть большихъ съ десятью меньшими вѣсятъ 304 фунта, а пятнадцать меньшихъ съ десятью большими 480 фунтовъ; спрашивается вѣсъ каждаго сорта ядеръ?*

Естьлибъ мнѣ извѣстенъ былъ вѣсъ ядра каждаго сорта, то умноживъ тяжесть ядра большаго сорта на шесть, а меньшаго на десять, сложилъ бы оба произведенія вмѣстѣ: сумма должна въ такомъ случаѣ составить 304 фунта; равномѣрно умноживъ вѣсъ ядра большаго сорта на десять, а меньшаго на пятнадцать, и сложивъ оба произведенія сіи вмѣстѣ, въ суммѣ получилъ бы 480 фунтовъ. И такъ увѣрившись въ этомъ, положимъ вѣсъ ядра большаго сорта равнымъ x, а меньшаго y, и получимъ двѣ слѣдующія экваціи $6x + 10y = 304$ и $10x + 15y = 480$.

Теперь остается только опредѣлить x и y; почему въ каждомъ уравненіи вывожу величину x; изъ перваго, по перестановкѣ въ немъ членовъ и по раздѣленіи $x = \frac{304 - 10y}{6}$; изъ втораго $x = \frac{480 - 15y}{10}$; сравнивъ обѣ сіи величины, получаю $\frac{304 - 10y}{6} = \frac{480 - 15y}{10}$ эквацію, въ которой по вышепредписаннымъ правиламъ опредѣляю $y = 16$.

А чтобъ опредѣлить x, то взявши опять выведенную прежде величину x, именно $x = \frac{704 - 10y}{6}$, и вставивъ вмѣсто y величину его 16, нахожу $x = \frac{144}{6} = 24$; слѣд. ядра большаго сорта должны быть 24 фунтовъ, а меньшаго 16. Въ справедливости

сего рѣшенія удостовѣряетъ то, что шесть 24 фунтовыхъ ядеръ съ десятью 16 фунтовыми вѣсятъ въ самой вещи 304 фунта; и опять десять 24 фунтовыхъ съ пятнадцатью 16 фунтовыми вѣсятъ 480 фунтовъ.

Вопросъ II. *Пушка 24, состоящая изъ мѣди и олова, вѣситъ 5531 фунтъ, и заключаетъ въ себѣ 8,95 кубическихъ футовъ состава; требуется опредѣлить въ ней количество мѣди и олова, знавши, что кубической футъ мѣди вѣситъ 630 фунтовъ, а олова 512?*

Естьли извѣстно будетъ число кубическихъ футовъ каждаго металла, то сложу оба числа сіи вмѣстѣ, сумма ихъ должна составить 8,95. Потомъ умножу 630 фунтовъ на число кубическихъ футовъ мѣди, произведеніе покажетъ количество мѣди, находящейся въ пушкѣ; равномѣрно умножу 512 на число кубическихъ футовъ олова, въ произведеніи выдетъ количество олова; наконецъ сложу оба произведенія, и сумма представитъ 5531 фунтъ, вѣсъ всей пушки.

Разсуждая такимъ образомъ, представимъ чрезъ x число кубическихъ футовъ мѣди, а чрезъ y олова; слѣд. по предположенію выходитъ $x + y = 8,95$ и $630x + 512y = 5531$.

Изъ первой эквацїи вывожу $x = 8,95 - y$, изъ второй $x = \frac{5531 - 512y}{630}$; слѣд. $8,95 - y = \frac{5531 - 512y}{630}$ и $y = \frac{107,5}{118} = 0,911$.

Вставивъ величину сію въ уравненіи x, именно въ $x = 8,95 - y$, получу $x = 8,039$.

Хотя бы два вещества, входящія въ составъ, имѣли подробныя тяжести (*) и не такія, какія пред-

---

(*) *Подробною тяжестію* называется такая тяжесть тѣла, коего величина или масса извѣстна. Говоря, что такое-то тѣло вѣситъ 12 фунтовъ, опредѣляемъ тѣмъ

положены въ предыдущемъ примѣрѣ, и притомъ величина или масса, такъ какъ и цѣлой вѣсъ состава, были даны совсѣмъ другія; однакожъ способъ сыскивать количество каждаго сорту вещества, остается тотъ же и въ семъ случаѣ. А дабы всѣ рѣшенія такого свойства вопросовъ заключить въ одно, то положимъ вообще, что число кубическихъ футовъ всего состава двухъ сортовъ вещества будетъ - - a
Вѣсъ состава, изображенный въ фунтахъ - - b
Вѣсъ кубическаго фута одного вещества - - c
Вѣсъ кубическаго фута другаго вещества - - d
c и d представляютъ фунты.

Послѣ чего положивъ x за число кубическихъ футовъ перваго вещества, а y втораго, получимъ двѣ экваціи.

$$x + y = a$$
$$\text{и } cx + dy = b$$

Изъ первой выходитъ $x = a - y$, изъ второй $x = \frac{b - dy}{c}$; сравнивъ обѣ сіи величины, дѣлаю уравненіе $a - y = \frac{b - dy}{c}$, изъ котораго вывожу $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Для опредѣленія величины x, вставливаю въ уравненіи $x = a - y$ найденную величину y, и получаю $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$, или по приведеніи (43) $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

одинъ только вѣсъ его, а не самой родъ вещества, изъ котораго оно состоитъ; но говоря, на примѣръ, 12 *кубическихъ дюймовъ обыкновенной воды вѣсятъ 7 унцій и 6 гранъ*, опредѣляемъ въ такомъ случаѣ тяжесть этаго свойства воды, и слѣд. бываемъ послѣ въ состояніи опредѣлить вѣсъ всякой другой величины или количества того же рода воды.

И такЪ по сысканнымЪ величинамЪ $x = \frac{b - ad}{c - d}$ и $y = \frac{ac - b}{c - d}$, можно вывести самое простое правило для общаго рѣшенія всѣхЪ вопросовЪ такого свойства.

Но прежде нежели предпишемЪ правило сіе, замѣтимЪ 1 е. что b означаетЪ цѣлой вѣсЪ состава; 2 е. a показываетЪ число частей всего состава, d вѣсЪ частей одного втораго сорта; слѣд. ad означаетЪ вѣсЪ всей массы состава, какЪ бы она состояла изЪ одного вещества втораго сорта; наконецЪ знаменатель $c - d$ представляетЪ разность подробныхЪ тяжестей каждаго сорту вещества.

Разбирая такимЪ же образомЪ величину y, увидимЪ, что ac показываетЪ вѣсЪ всей величины состава, какЪ бы она состояла изЪ одного перваго вещества. И такЪ заключимЪ выше обЪявленное правило.

Найди вѣсЪ величины состава, какЪ бы та величина состояла изЪ одного втораго вещества; вычти сей вѣсЪ изЪ даннаго вѣсу всего состава, и остатокЪ раздѣли на разность подробныхЪ тяжестей обоихЪ веществЪ: частное покажетЪ число частей перваго вещества, положеннаго вЪ составЪ.

А чтобЪ получить число частей втораго вещества, сыщи сколько должна потянуть величина состава, естьлибЪ она состояла вся изЪ одного перваго вещества; вычти изЪ нее данной вѣсЪ состава, и остатокЪ раздѣли на ту же разность подробныхЪ тяжестей.

Правило сіе есть то же самое, которое вЪ Ариѳметикѣ называется *ПравиломЪ Смѣшенія*.

Можно подЪ сей вопросЪ подвести множество другихЪ, которые при первомЪ взглядѣ покажутся отмѣнными. На примѣрЪ слѣдующій: *Перелить 522 фунта на 42 куска, изЪ коихЪ бы одни вѣсомЪ были 24 фун. а другіе 6 фун.* Ибо сЪ малѣйшимЪ вниманіемЪ можно примѣтить, что вопросомЪ симЪ требует-

ся тожъ, какъ бы: *составъ 42 кубическихъ футовъ вѣситъ 522 фунта; изъ двухъ веществъ, составляющихъ его, кубической футъ перваго вѣситъ 24 фунта, а другаго 6 фун.* Поступая по предыдущему правилу, найдемъ, что 24 фунтовыхъ кусковъ должно выйти 15, а шести-фунтовыхъ 27.

Тѣмъ же правиломъ можно рѣшить еще и слѣдующій вопросъ: *Кубической футъ морской воды вѣситъ 74 фунта, а дождевой 70 фун.; спрашивается, какія части должно взять морской и дождевой воды для составленія такой, которой бы кубической футъ вѣсилъ 73 фунта?*

Не трудно понять всякому, какъ полезно заблаговременно научиться представлять общимъ образомъ извѣстныя количества даннаго вопроса, и разбирать Алгебраическіе результаты рѣшеній.

Вопросъ III. *Дано три слитка, состоящіе изъ золота, серебра и мѣди; составъ перваго слитка таковъ, что въ 16 унціяхъ его заключается 7 золота, 8 серебра и 1 мѣди; въ 16 унціяхъ втораго находится 5 золота, 7 серебра и 4 мѣди; напослѣдокъ въ 16 унціяхъ третьяго 2 золота, 9 серебра и 5 мѣди. Требуется здѣлать изъ сихъ слитковъ четвертой такой, котораго бы въ 16 унціяхъ находилось* $4\frac{15}{16}$ *унціи золота,* $7\frac{10}{16}$ *серебра, и* $3\frac{7}{16}$ *мѣди?*

Представимъ чрезъ x число унцій, взятыхъ изъ перваго слитка, чрезъ y изъ втораго, и чрезъ z изъ третьяго.

Поелику 16 унцій перваго слитка заключаютъ въ себѣ 7 унцій золота, то для опредѣленія, какое число унцій золота должно находиться въ количествѣ x того же слитка, сыскиваю четвертой членъ въ сей пропорціи $16 : 7 = x$; сей четвертой членъ будетъ $\frac{7x}{16}$; разсуждая такимъ же образомъ, найду, что

количество y втораго слитка будетъ имѣть въ себѣ $\frac{5y}{16}$ золота, а количество z третьяго $\frac{2z}{16}$. Сумма сихъ трехъ количествъ состоитъ изъ $\frac{7x + 5y + 2z}{16}$; но по положенїю она должна равна быть $4\frac{15}{16}$, или $\frac{79}{16}$; слѣд. $\frac{7x + 5y + 2z}{16} = \frac{79}{16}$

Для выполненїя втораго условїя, замѣть, что во взятомъ количествѣ x унцїй изъ перваго слитка, должно находиться $\frac{8x}{16}$ серебра, въ количествѣ y втораго $\frac{7y}{16}$, и наконецъ въ количествѣ z третьяго $\frac{9z}{16}$; сумма сихъ трехъ количествъ состоитъ изъ $\frac{8x + 7y + 0z}{16}$; а какъ сумма сїя должна равняться $7\frac{10}{16}$ или $\frac{122}{16}$, то $\frac{8x + 7y + 9z}{16} = \frac{122}{16}$.

Поступая такимъ же образомъ, получу въ сходственность третьяго условїя слѣдующую эквацїю $\frac{x + 4v + z}{16} = \frac{55}{16}$.

Какъ число 16 служитъ общимъ дѣлителемъ въ каждой части всѣхъ трехъ эквацїй, то по уничтоженїи его произойдутъ слѣдующїя три въ другомъ видѣ.

$$7x + 5y + 2z = 79$$
$$8x + 7y + 9z = 122$$
$$x + 4y + 5z = 55$$

Выводя въ каждомъ изъ сихъ уравненїй величину x, получу - - - -

$$x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$$

$$x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$x = 55 - 4y - 5z$$

Сравнивъ первую величину x со второю и съ третьею (71), буду имѣть - - - -

$$\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$$

$$\text{и } \frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z,$$

уравненія съ двумя только неизвѣстными, съ которыми и поступаю по объявленному (66).

И для того, уничтоживъ въ нихъ знаменателей, выведу величины y - - - - - -

$$y = \frac{222 - 47z}{9}$$

$$\text{и } y = \frac{306 - 33z}{23}.$$

Сравнивъ двѣ величины сіи y между собою, получу $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$, а по совершеніи обыкновенныхъ дѣйствій $z = \frac{2352}{784} = 3$.

Для опредѣленія величины y, вставливаю въ какомъ нибудь изъ уравненій его, на примѣръ въ . . . $y = \frac{222 - 47z}{9}$, въ мѣсто z величину его 3, и нахожу $y = \frac{81}{9} = 9$.

Напослѣдокъ, для опредѣленія величины x, вставливаю въ мѣсто y и z найденныя величины ихъ 9 и 3 въ какомъ нибудь изъ трехъ его уравненій, на

примѣръ въ $x = 55 - 4y - 5z$, послѣ чего выходитъ $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; и такъ для составленія четвертаго слитка надлежитъ взять, на 16 унцій его, 4 унціи изъ перваго, 9 изъ втораго и 3 изъ третьяго; и тогда сей новой слитокъ будетъ содержать въ сходственность требованія $4\frac{15}{16}$ унцій золота, $7\frac{10}{16}$ серебра и $3\frac{7}{16}$ мѣди.

Въ самой вещи, поелику первой слитокъ содержитъ въ 16 унціяхъ 7 золота, 8 серебра и 1 мѣди, то взявши изъ сего слитка только 4 унціи, получишь въ этомъ количествѣ золота $\frac{28}{16}$, серебра $\frac{32}{16}$, а мѣди $\frac{4}{16}$. По той же причинѣ въ 9 унціяхъ втораго слитка будетъ заключаться золота $\frac{45}{16}$, серебра $\frac{63}{16}$, а мѣди $\frac{36}{16}$; и въ трехъ унціяхъ третьяго будетъ находиться золота $\frac{6}{16}$, серебра $\frac{27}{16}$, мѣди $\frac{15}{16}$.

Сложивъ вмѣстѣ три количества каждаго сорту металловъ, происходящія изъ данныхъ трехъ слитковъ, въ суммѣ получишь $\frac{70}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, или $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ и $3\frac{7}{16}$ точно тѣ количества золота, серебра и мѣди, изъ которыхъ долженъ состоять четвертой слитокъ.

О томъ, въ какихъ случаяхъ данные Вопросы остаются неопредѣленными и въ какихъ они бываютъ невозможными.

75. Не рѣдко случается, что вопросы, въ которыхъ хотя и находится столько же

уравненій, сколько неизвѣстныхъ, бываютъ совсѣмъ тѣмъ неопредѣленны, то есть, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній.

Это случается тогда, когда нѣкоторые изъ условій, хотя по видимому разнятся между собою, въ самой же вещи бываютъ одинаковы. Эквацiи, изображающія такія условія, происходятъ или изъ умноженія однихъ на другія, или вообще нѣкоторыя изъ нихъ состоятъ изъ одной или многихъ другихъ, сложенныхъ или вычтенныхъ, умноженныхъ или раздѣленныхъ на какія нибудь числа. На примѣръ вопросъ, изъ котораго происходятъ слѣдующія три уравненія,

$$5x + 3y + 2z = 17$$
$$8x + 2y + 4z = 20$$
$$18x + 8y + 8z = 54$$

будетъ состоять изъ неопредѣленнаго числа рѣшеній, хотя и кажется по уравненіямъ, что x, y и z должны имѣть по одной только величинѣ. Ибо послѣдняя между сими тремя эквацiями состоитъ изъ второй, сложенной съ удвоенною первою. Но нѣтъ нималаго сумнѣнія, что по допущеніи двухъ первыхъ, послѣдняя по необходимости выходитъ, и слѣд. она не представляетъ никакого новаго условія: въ вопросѣ столькожъ

извѣстно съ нею, сколько и съ двумя первыми. Скоро увидимъ, для чего въ вопросахъ, которые для трехъ неизвѣстныхъ заключаютъ только два уравненія, каждое неизвѣстное имѣетъ неопредѣленное число величинъ.

76. Неопредѣленные случаи узнаемъ по выкладкѣ: и вотъ какимъ образомъ. Когда поступая по вышепредписаннымъ правиламъ въ изысканіи неизвѣстныхъ, дойдешь до одной какой нибудь экваціи такой, которая заключается въ другихъ, то въ продолженіи выкладки выдетъ *одинаковое уравненіе* (équation identique), то есть, такое уравненіе, въ которомъ обѣ части не только будутъ равны между собою, но и еще будутъ состоять изъ подобныхъ и равныхъ членовъ. Сколько будетъ находиться одинаковыхъ въ вопросѣ эквацій, столько будетъ ихъ и безполезныхъ.

На примѣръ, естьли въ каждомъ изъ слѣдующихъ двухъ уравненій $6x + 8y = 12$ и $x + \frac{4}{3} y = 2$, выведу величину x, то есть, $x = \frac{12 - 8y}{6}$; и $x = 2 - \frac{4}{3} y$; то по сравненіи обѣихъ сихъ величинъ, получу $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3} y$, или по уничтоженіи знаменателей $36 - 24y = 36 - 24y$ одинаковое уравненіе, то

которому не можно узнать величины y, ибо по переставкѣ членовъ и по приведенiи выходитъ $0 = 0$.

Равномѣрно и сiи три уравненiя доведутъ насъ до такого же заключенiя,

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

Ибо нашедши въ первомъ уравненiи $x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}$, во второмъ по уничтоженiи знаменателей, по переставкѣ членовъ и по приведенiи $x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$, въ третьемъ $x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, по томъ сравнивъ первую изъ трехъ найденныхъ величинъ x со второю и съ третьею, получу $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$ и $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$, или по уничтоженiи въ нихъ знаменателей, буду имѣть $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, и $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$ одинаковыя уравненiя, по которымъ не можно опредѣлить ни y, ни z, потому что оба сiи уравненiя превращаются въ $0 = 0$. Слѣд. между данными тремя находится одна только настоящая эквацiя.

Вопросы, по содержанiю которыхъ доходимъ до такихъ заключенiй, бываютъ неопредѣленны, но не невозможны. Скоро покажемъ, какъ должно съ ними поступать.

77. Когда вопросъ, въ которомъ заключаются уравненiя первой степени, бываетъ невозможной, то это примѣтить можно въ

продолженіи выкладки, которая доводитъ до несообразности; на примѣръ до такого заключенія, что $4 = 3$.

На примѣръ, естьли будутъ даны два такія уравненія:

$$5x + 3y = 30$$
$$\text{и } 20x + 12y = 135$$

То изъ перваго выходитъ $x = \frac{30 - 3y}{5}$, изъ втораго $x = \frac{135 - 12y}{20}$; сравнивъ обѣ сіи величины, получимъ $\frac{30 - 3y}{5} = \frac{135 - 12y}{20}$, и по уничтоженіи знаменателей $600 - 60y = 675 - 60y$; послѣднее уравненіе доведетъ до заключенія $600 = 675$, которое безъ сумнѣнія не сообразно; слѣд. вопросъ, изъ котораго могутъ выйти двѣ такія эквацiи $5x + 3y = 30$ и $20x + 12y = 135$, должно почитать за невозможной и несообразной.

78. Хотя отрицательныя рѣшенія показываютъ также нѣкоторой родъ невозможности въ вопросѣ; однакожъ невозможность сія не совершенная, и относится къ тому, въ какомъ смыслѣ должно принимать данныя количества; ибо много находится случаевъ, гдѣ рѣшенія такого свойства допускаются и бываютъ натуральны. *Смотри изъясненное* (62).

О неопредѣленныхъ Задачахъ.

79. *Неопредѣленною задачею* называется всякой вопросъ, которой можно рѣ-

шить разными образами, не опредѣляя именно, какой больше приличествуетъ. Задачи такого свойства заключаютъ въ себѣ меньше условій, чѣмъ неизвѣстныхъ; и хотя, разсматривая ихъ вообще, они подлежатъ безчисленному множеству рѣшеній, однакожъ не рѣдко случается, что число сихъ рѣшеній ограничивается нѣкоторыми условіями. Но какъ сіи условія не могутъ быть представлены въ эквацiяхъ, то не позволяютъ опредѣлить прямымъ образомъ, изъ какого числа рѣшеній долженъ состоять данной вопросъ.

На примѣръ, естьли будетъ данъ такой вопросъ: *найти два числа, которыхъ бы сумма равнялась* 24? То назвавъ x одно изъ искомыхъ чиселъ, а другое y, сдѣлаю уравненіе $x + y = 24$, изъ котораго выведу $x = 24 - y$. Но вопросъ сей можетъ подлежать безчисленному множеству рѣшеній, какъ скоро подъ x и y будемъ разумѣть какъ цѣлыя, такъ и дробныя числа, также положительныя и отрицательныя; ибо въ такомъ случаѣ стоитъ только принять за величину y, какое число угодно, и заключить о величинѣ x по эквацiи $x = 24 - y$, поставивъ за y число, принятое произвольно. По чему положивъ $y = 1$,

$y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$ и проч. получимЪ $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$ и проч. Но естьли потребуется сыскать одни цѢлыя числа и при томЪ положительныя, тогда число рѢшеній сдѢлается ограниченнымЪ; ибо какЪ скоро x долженЪ быть положительнымЪ, то y не можетЪ быть больше 24; а какЪ при томЪ спрашиваются цѢлыя числа, то найденное уравненіе должно имѢть всѢхЪ рѢшеній только 25, включая туда же и o. ТакимЪ образомЪ положивЪ поперемѢнно $y = o$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ и проч. получимЪ $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$ и проч.

80. ОднакожЪ не всегда можно сЪ такою легкостію, какЪ вЪ предыдущемЪ примѢрѢ, выполнить условіе, вЪ которомЪ хотя и будетЪ предположено, что искомыя числа должны быть цѢлыя и положительныя. СлѢдующіе вопросы покажутЪ то на самомЪ дѢлѢ.

ВопросЪ I. *Требуется узнать, сколькими образами можно заплатить 42 рубли, отдавая по 17 руб. и получая обратно по 11 рублей?*

ЗдѢсь предполагается, что число платежей и обратныхЪ пріемовЪ не одинаково.

ПредставивЪ число платежей чрезЪ x, а обратныхЪ пріемовЪ чрезЪ y, заключаю, что сумма отдан-

ныхъ денегъ должна состоять изъ $17x$, а полученныхъ на оборотъ изъ $11y$, слѣд. всѣхъ денегъ будетъ заплачено только $17x - 11y$; но какъ по договору слѣдуетъ заплатить 542 руб., то дѣлаю такое уравненіе: $17x - 11y = 542$. Вывожу наконецъ величину y, то есть, неизвѣстнаго съ меньшимъ коеффиціентомъ, и получаю $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Поелику кромѣ сей эквацїи нѣтъ другой, то не трудно понять, что положивъ за x произвольное число, получишь тотчасъ и величину y, долженствующую рѣшить уравненіе. Но какъ вопросомъ требуется, чтобъ x и y были цѣлыя числа, то вотъ какимъ образомъ прямо сыскать ихъ можно.

Величина $y = \frac{17x - 542}{11}$ приводится, (по учиненіи въ ней такого дѣленія, какое только можно здѣлать) въ $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; а какъ $\frac{6x - 3}{11}$ должно представлять цѣлое число, то пусть будетъ это число u: почему дѣлаю заключеніе, что $\frac{6x - 3}{11} = u$, и слѣд. $6x - 3 = 11\,u$, и $x = \frac{11u + 3}{6}$, или по раздѣленіи $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; но надлежитъ, чтобъ $\frac{5u + 3}{6}$ составляло также цѣлое число, и пусть будетъ оно равно t; и такъ $\frac{5u + 3}{6} = t$, или $5u + 3 = 6t$, и слѣд. $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$; но какъ и $\frac{t - 3}{5}$ должно равняться цѣлому числу, то пусть будетъ оное число s; почему $\frac{t - 3}{5} = s$, и слѣд. $t = 5s + 3$. Дѣйствіе здѣсь кончилось, потому что принявъ за s какое угодно цѣлое число, получишь за ве-

личину t цѣлое же число такое, какое требуется вопросомъ, понеже нѣтъ больше знаменателя въ уравненіи.

Возвратимся теперь къ величинамъ x и y. Поелику нашли, что $u = \frac{6t - 3}{5}$, чего для поставивъ вмѣсто t сысканную величину его $5s + 3$, получишь $u = \frac{30s + 18 - 3}{5} = 6s + 3$; а какъ найдено также, что $x = \frac{11u + 3}{6}$, то поставивъ вмѣсто u величину его, получишь $x = \frac{66s + 33 + 3}{6} = 11s + 6$; на конецъ поелику найдено, что $y = \frac{17x - 542}{11}$, то поставивъ за x величину его, получишь .... $y = \frac{187s + 102 - 542}{11} = 17s - 40$. Такимъ образомъ сходственныя величины x и y будутъ $x = 11s + 6$ и $y = 17s - 40$. По первой эквацїи можно принять за величину s всякое число, какое угодно, но вторая не позволяетъ взять его меньше 3; ибо y должно быть положительное число, и слѣд. $17s$ должно быть больше 40, или s должно быть больше $\frac{40}{17}$, то есть, больше 2.

И такъ можно рѣшить вопросъ сей разными и безчисленными образами, поставляя въ величинахъ x и y въ мѣсто s всякїя удобовообразимыя цѣлыя и положительныя числа, начиная отъ 3 до безконечности. Такимъ образомъ полагая попеременно $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, и проч. получишь за сходственныя величины x и y слѣдующїя числа . .

$x = 39$ - - - - - - -	$y = 11$
$x = 50$	$= 28$
$= 61$	$= 45$
$= 72$	$= 62$
$= 83$	$= 79$

изЪ которыхЪ каждое такого свойства, что отдавЪ число разЪ, означенное чрезЪ x по 17 рублей, и получивЪ на оборотЪ означенное чрезЪ y по 11 руб. во всякомЪ случаѣ будешь имѣть сумму, состоящую изЪ 542 рублей.

ВопросЪ II. *Требуется перелить 741 фунтЪ на куски трехЪ сортовЪ, числомЪ 41, именно на 24 фунтовые, 19 фунтовые и 10 фунтовые?*

Пусть будетЪ x, y, z число кусковЪ каждаго сорта; но поелику всѣхЪ ихЪ должно быть 41, то заключаю 1е. что $x + y + z = 41$.

2е. А какЪ при томЪ каждой кусокЪ перваго сорту состоитЪ изЪ 24 фунтовЪ, то число x кусковЪ должно заключать вЪ себѣ x разЪ 24 фун. или $24x$; по той же причинѣ y кусковЪ втораго сорта будетЪ состоять изЪ $19y$; а z кусковЪ третьяго изЪ $10z$. ВѣсЪ всѣхЪ кусковЪ разнаго разбору по положенїю равняется 741 фунту; и такЪ заключаю наконецЪ, что $24x + 19y + 10z = 741$.

Вывожу вЪ каждомЪ изЪ найденныхЪ двухЪ уравненїй величину какого нибудь неизвѣстнаго, на примѣрЪ x, и получаю $x = 41 - y - z$ и ..... $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; сравниваю обѣ величины x между собою и нахожу $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, или по уничтоженїи знаменателя $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$, а по переставкѣ членовЪ и по приведенїи $243 = 5y + 14z$.

Беру величину y сЪ меньшимЪ коеффицїентомЪ, и вывожу $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$; но какЪ y и z должны быть цѣлыя числа, то надлежитЪ, чтобЪ $\frac{3 - 4z}{5}$ представляло также цѣлое число, и положимЪ оное t. И такЪ $\frac{3 - 4z}{5} = t$, или

$3 - 4z = 5t$, и $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; но $\frac{3 - t}{4}$ должно быть цѣлое число, и пусть будетъ оно u; отъ чего произойдетъ $\frac{3 - t}{4} = u$, или $3 - t = 4u$, и слѣд. $t = 3 - 4u$.

Возвратимся теперь къ величинамъ x, y, z.

Поелику найдено, что $z = \frac{3 - 5t}{4}$, то поставивъ въ мѣсто t, величину его $3 - 4u$, получишь $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; потомъ въ уравненiи $y = \frac{243 - 14z}{5}$ поставивъ за z величину его, получишь $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Наконецъ вмѣсто найденной величины $x = 41 - y - z$ получишь $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. Такимъ образомъ сходственными величинами x, y, z будутъ $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$ и $z = 5u - 3$, въ которыхъ за мѣсто u можно принимать всякое цѣлое число, лишь бы въ заключенiи выходили положительныя числа для x, y и z; но допущенiе сiе требуетъ еще трехъ другихъ, 1 е. чтобъ $9u$ было больше 13, или u больше $\frac{13}{9}$, или $1\frac{4}{9}$.... 2 е. чтобъ 57 было больше $14u$, или u меньше $\frac{57}{14}$, то есть, меньше $4\frac{1}{4}$; напослѣдокъ 3 е. чтобъ $5u$ было больше 3 или u больше $\frac{3}{5}$. Изъ сего должно заключить, что число рѣшенiй весьма ограничено и состоитъ только изъ трехъ. И такъ полагая за величину u числа 2, 3 и 4,

и по онымъ выводя величины x, y, z, найдемъ, что 741 фунтъ можно перелить на требуемое число кусковъ трояким только образомъ, именно такъ . . .

x		y		z
5	- - - - -	29	- - - - -	7
14	- - - - -	15	- - - - -	12
23	- - - - -	1	- - - - -	17.

Объ Уравненіяхъ второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

81. *Уравненіями второй степени* называются тѣ, въ которыхъ неизвѣстное количество умножено само на себя, или представляетъ квадратъ.

На примѣръ $5x^2 = 125$ есть уравненіе второй степени, потому что количество x въ членѣ $5x^2$ умножено само на себя.

82. Уравненіе, въ которомъ не находится другой степени неизвѣстнаго, кромѣ квадрата его, рѣшится весьма легко: стоитъ только уничтожить въ неизвѣстномъ множителей или дѣлителей его, потомъ по перестановкѣ въ другую часть эквацiи всѣхъ количествъ, соединенныхъ съ тѣмъ неизвѣстнымъ знаками + или —, извлечь квадратной корень изъ каждой части уравненія.

На примѣръ изъ уравненія $5x^2 = 125$, вывожу $x^2 = \frac{125}{5} = 25$; потомъ, извлекши квадратной корень изъ обѣихъ частей, получаю $x = 5$.

Равнымъ образомъ въ данномъ уравненiи $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, по уничтоженiи дробей и по перестановкѣ членовъ, нахожу $25x^2 - 12x^2 = 105$, или $13x^2 = 105$, или $x^2 = \frac{105}{13}$; и слѣд. $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Сей знакъ $\sqrt{}$ показываетъ, что изъ даннаго количества должно извлечь квадратной корень, и называется *радикаломъ*. Естьли нужно извлечь квадратной корень изъ всей дроби, то радикальной знакъ $\sqrt{}$ поставляется предъ обоими членами дроби, какъ показано было въ предыдущемъ примѣрѣ, именно въ $\sqrt{\frac{105}{13}}$.

Когдажъ надлежитъ означить квадратной корень одного какого нибудь члена дроби, то поставляется радикалъ въ таковомъ случаѣ предъ извлекаемымъ только. Почему для означенiя квадратнаго корня изъ 50, раздѣленнаго на 3, пишу такъ $\frac{\sqrt{50}}{3}$; а для означенiя 15, раздѣленнаго на квадратной корень изъ 5, поставляю $\frac{15}{\sqrt{5}}$. Наконецъ естьли извлекаемое количество будетъ разнородное, то для представленiя квадратнаго его корня приводится отъ радикала черта, покрывающая все то количество; на примѣръ $\sqrt{3ab + b^2}$ показываетъ, что изъ $3ab + b^2$

надлежитъ извлечь квадратной корень. Иногда черта сія не проводится, и извлекаемое количество изображается иначе заключеннымъ въ скорбахъ, на примѣръ $\sqrt{(3ab + b^2)}$ означаетъ тожъ, что $\sqrt{3ab + b^2}$.

83. Поелику видѣли мы (24), что при умноженіи двухъ количествъ съ одинакими знаками, произведеніе ихъ имѣетъ всегда знакъ $+$; и такъ увѣрившись въ сей истиннѣ, должно предъ корнемъ, выходящимъ изъ положительнаго количества, ставить произвольно знакъ $+$ или $-$.

Такимъ образомъ извлекая изъ $x^2 = 25$, можно заключить, что $x = +5$, или $x = -5$; ибо каждое изъ сихъ чиселъ, умножено будучи само на себя, даетъ въ произведеніи одинаково $+ 25$. Слѣд. по разрѣшеніи уравненія $x^2 = 25$, должно писать всегда такъ: $x = \pm 5$, и произносить x равно *плюсъ* или *минусъ* 5.

Равномѣрно въ эквацiи $x^2 = \frac{105}{13}$, должно изобразить корень неизвѣстнаго количества чрезъ $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$.

84. При извлеченіи квадратнаго корня изъ отрицательнаго количества, поставляется предъ всѣмъ количествомъ радикалъ, последуемый за двойнымъ знакомъ $\pm$.

На примѣръ, для означенія квадратнаго корня въ данномъ уравненіи $x^2 = -4$, пишу такъ...

$x = \pm \sqrt{-4}$; и хотя можно извлечь квадратной корень изъ 4, которой будетъ 2, однако не должно писать $x = \pm 2$. Разсмотримъ для чего?

85. Естьли въ результатѣ рѣшенія выходитъ $x^2 = -4$, то должно заключить, что задача, изъ которой выведено такое уравненіе, есть невозможная, потому что отрицательное количество не можетъ имѣть квадратнаго корня ни въ точности, ни чрезъ приближеніе. Ибо нѣтъ такого количества, ни положительнаго, ни отрицательнаго, которое бы, умножено будучи само на себя, производило количество отрицательное же: правда, что -4 на примѣръ, можетъ принято быть за такое количество, которое произошло изъ $+2$, умноженнаго на -2; но оба сіи количества, имѣя противные знаки, не равны между собою, и слѣд. произведеніе ихъ не можетъ представлять квадрата. По чему вопросъ, которымъ предлагается извлечь квадратной корень изъ отрицательнаго количества, должно почитать несообразнымъ, и рѣшеніе его будетъ не возможно. По сему знаку познается невозможность задачъ второй степени.

Впрочемъ не должно почитать безполезнымъ разсматриваніе квадратныхъ корней изъ отрицательныхъ количествъ: ибо не рѣд-

ко случается, что задача, сама по себѣ весьма возможная, не можетъ иначе рѣшена быть, какъ чрезъ стеченіе подобныхъ количествъ, въ которыхъ наконецъ все, что было несообразнымъ, уничтожается. Количества такого роду называются *умственными.*

И такъ $\sqrt{(-a)}$ есть количество умственное; $a + \sqrt{(-b)}$ будетъ также количество умственное.

86. Хотя не нужно болѣе изъяснять о рѣшеніи уравненій второй степени, когда въ нихъ кромѣ квадрата x не будетъ другой степени; но естьли сверхъ квадрата неизвѣстнаго количества случится еще и первая его степень, умноженная или раздѣленная на извѣстное количество, какъ въ слѣдующемъ примѣрѣ $x^2 - 4x = 12$, то вышеобъявленнаго недостаточно. Способъ рѣшенія въ такомъ случаѣ зависитъ отъ нѣкотораго приготовленія эквацiи, именно, надлежитъ здѣлать первую ея часть совершеннымъ квадратомъ, а сіе производи такъ: 1ᵉ. перенеси въ одну часть уравненія всѣ члены съ x, а извѣстные въ другую; 2ᵉ. членъ, содержащій x^2, долженъ быть положительнымъ; естьлижъ онъ будетъ съ —, то перемѣни всѣ знаки уравненія, ибо такое дѣйствіе не перемѣнитъ его; 3ᵉ. членъ x^2 не долженъ

имѣть ни множителя, ни дѣлителя: когдажъ они случатся, то уничтожь ихъ умноженіемъ всѣхъ прочихъ членовъ эквацiи на дѣлителя, или раздѣленіемъ ихъ на множителя.

На примѣръ, данную эквацiю $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, рѣши такъ: 1е. перенеси всѣ x въ первую часть, поставивъ x^2 на первомъ мѣстѣ; получишь $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, или $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2е. перемѣни знаки у всѣхъ членовъ, чтобъ зделать x^2 положительнымъ, и получишь $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3е. умножь на 5, отъ чего выдетъ $3x^2 - 30x = -20$; наконецъ раздѣли на 3, и получишь $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

А какъ всякое уравненіе второй степени можно привести въ такое состояніе, то мы займемся теперь рѣшеніемъ приготовленныхъ такимъ образомъ эквацiй.

87. По предположеніи сего приступай къ рѣшенію уравненій второй степени, наблюдая слѣдующее правило.

Возьми половину извѣстнаго количества, которое умножаетъ x во второмъ членѣ: составь изъ сей половины квадратъ, и прибавь его къ обѣимъ частямъ

уравненія, отъ чего первая часть здѣлается совершеннымъ квадратомъ. Извлеки квадратной корень изъ каждой части, и поставь предъ корнемъ второй части двойной знакъ $\pm$; *послѣ чего эквація перемѣнится въ первую степень.*

Что касается до извлеченія квадратнаго корня изъ первой части, то оно состоитъ въ слѣдующемъ: извлеки корень изъ квадрата неизвѣстнаго количества, потомъ изъ квадрата прибавленнаго; сей второй корень соедини съ первымъ такимъ знакомъ, какой будетъ находиться во второмъ членѣ уравненія.

На примѣръ, въ уравненіи $x^2 + 6x = 16$, беру половину изъ извѣстнаго количества 6, умножающаго x во второмъ членѣ: дѣлаю изъ сей половины квадратъ и прибавляю квадратъ 9 къ обѣимъ частямъ эквацiи, отъ чего происходитъ $x^2 + 6x + 9 = 25$. Потомъ извлекая квадратной корень изъ x^2, нахожу x, изъ 9 нахожу 3; а какъ второй членъ уравненія $6x$ есть положительной, то заключаю, что $x + 3$ долженъ быть квадратной корень первой части; чтожъ касается до второй части, то онъ будетъ 5, или (83) ± 5; слѣд. $x + 3 = \pm 5$. Наконецъ для опредѣленія x надлежитъ здѣлать обыкновенную переставку членамъ; послѣ чего получу $x = \pm 5 - 3$, то есть, такое уравненіе, въ которомъ x имѣетъ двѣ величины, именно: $x = + 5 - 3 = 2$, и $x = - 5 - 3 = - 8$. Послѣ увидимъ, что значитъ вторая величина.

Чтобъ понять причину сего правила, то надлежитъ припомнить замѣчаніе (25), въ

силу котораго квадратъ двучленнаго корня состоитъ всегда изъ квадрата перваго члена, изъ удвоеннаго произведенія перваго члена на второй, и изъ квадрата втораго члена.

По предположеніи сего, естьли потребуетъ нужда прибавлять къ такому количеству, каково $x^2 + 6x$, то, чѣмъ можно здѣлать его совершеннымъ квадратомъ, то надлежитъ примѣчать: 1^е. что количество сіе содержитъ уже квадратъ, именно x^2, которой можно почитать за квадратъ первой части двучленнаго количества; 2^е. что послѣдующій членъ $6x$ можно принимать всегда за удвоенное произведеніе x на второе количество; 3^е. что сіе второе количество необходимо должно быть половина 6 множителя x. Слѣд. всякому легко примѣтить, что въ уравненіи $x^2 + 6x$ недостаетъ только квадрата втораго члена, то есть, квадрата половины множителя x во второмъ членѣ. Разсужденіе сіе относится вообще ко всѣмъ эквація̀мъ второй степени, какой бы впрочемъ не былъ множитель члена x.

Что касается до предписаннаго правила для извлеченія квадратнаго корня изъ первой части уравненія, то оно можетъ служить послѣдствіемъ, выходящимъ изъ составленія

квадрата. Поелику два крайніе квадрата, содержащіеся въ цѣломъ квадратѣ двучленнаго корня, представляютъ квадраты обоихъ членовъ; то нѣтъ нималаго сумнѣнія, что для опредѣленія ихъ стоитъ только извлечь корни по одиначкѣ изъ каждаго квадрата. Но для чего поставляется второй членъ корня съ такимъ же знакомъ, какой находится во второмъ членѣ эквацiи, то этому научаетъ насъ сама выкладка; ибо квадратъ изъ $a + b$ есть $a^2 + 2ab + b^2$, а изъ $a - b$ квадратъ выходитъ $a^2 - 2ab + b^2$.

Примѣры на предыдущее Правило для рѣшенія нѣкоторыхъ Вопросовъ второй степени.

88. Какой бы степени не было уравненіе, надлежитъ однакожъ, выводя его изъ вопроса, употреблять всегда предписанное (60) правило.

Вопросъ I. *Найти такое число, котораго бы квадратъ, сложенный съ тѣмъ же числомъ, взятымъ 8 разъ, составилъ* 33?

Естьли мнѣ извѣстно будетъ число сіе, которое положимъ x, то взявши квадратъ его x^2 и сложивши оной съ тѣмъ же числомъ, умноженнымъ на 8, то есть съ $8x$, получу въ суммѣ $x^2 + 8x$ то, что должно составлять 33; слѣд. заключаю, что $x^2 + 8x = 33$.

Для рѣшенія сего уравненія прибавляю къ каждой части его по 16, то есть, по квадрату половины числа 8, умножающаго x во второмъ членѣ, и получаю $x^2 + 8x + 16 = 49$ уравненїе, въ которомъ первая часть становится совершеннымъ квадратомъ. Извлекаю квадратной корень изъ каждой части по правилу (87), и нахожу $x + 4 = \pm 7$; слѣд. $x = \pm 7 - 4$, а по сему заключаю, что x имѣетъ двѣ величины, то есть, $x = 7 - 4 = 3$, и $x = -7 - 4 = -11$.

Первая изъ найденныхъ двухъ величинъ разрѣшаетъ вопросъ, потому что 9 квадратъ изъ 3, съ 3×8 или 24, составляетъ точно 33. Чтожъ принадлежитъ до второй, то она, какъ отрицательная, показываетъ, что долженъ быть другой вопросъ такой, въ которомъ взявши x въ противномъ смыслѣ, рѣшенїе должно состоять изъ 11; то есть, вторая величина x должна отвѣчать въ сходственность такого другаго вопроса: *Найти число, котораго бы квадратъ безъ тогожъ числа, взятаго 8 разъ, состоялъ изъ 33?* Что будетъ и справедливо; ибо квадратъ изъ 11 есть 121, и 11, умноженное на 8, даетъ въ произведенїи 88; разность между сими двумя числами выходитъ дѣйствительно 33.

Дабы утвердить сказанное (62) объ отрицательныхъ количествахъ, замѣтимъ, что второй вопросъ, представленной въ уравненїи, будетъ $x^2 - 8x = 33$; а разрѣшивъ сїю эквацїю по предписанному правилу, найдемъ $x = \pm 7 + 4$, то есть, такїя двѣ величины $x = 11$ и $= -3$, которыя совсѣмъ противны предыдущимъ.

89. Явствуетъ изъ сказаннаго, что уравненїе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ всегда два рѣшенія.

Ибо найденныя двѣ величины 11 и -3, поставлены будучи на мѣсто x въ уравненїи $x^2 - 8x = 33$, разрѣшаютъ его одинаково, то есть, первая часть уравненія сего будетъ въ обоихъ случаяхъ состоять

изъ 33. Въ разсужденіи 11 мы выше увѣрились; чтожъ касается до — 3, то квадратъ его есть + 9, и произведеніе — 3 на 8 состоитъ изъ — 24; но сіе последнее число, будучи вычтено изъ + 9 по показанному (11) правилу, даетъ въ остаткѣ + 9 + 24, или 33.

Хотя всякая эквація второй степени имѣетъ два рѣшенія; однако не должно заключать изъ сего, чтобъ вопросъ, изъ котораго выводится она, могъ рѣшиться также двоякимъ образомъ.

Ибо въ настоящемъ случаѣ вторая величина — 3 разрѣшаетъ уже не данной вопросъ, но совсѣмъ противной ему. Впрочемъ случается не рѣдко, что оба рѣшенія, зделанныя для уравненія, служатъ также и для вопроса. Доказательство на это зделаемъ въ третьемъ вопросѣ.

Вопросъ II. *Надлежало раздѣлить 175 рублей между нѣкоторымъ числомъ людей; но какъ двое изъ нихъ находились въ отлучкѣ, и слѣд. не могли получить своей части, то часть каждаго изъ получившихъ усугубилась по сему обстоятельству 10 рублями. Спрашивается, сколько всѣхъ человѣкъ было и съ отсутствующими?*

Естьли мнѣ извѣстно будетъ число людей, то раздѣливъ 175 на сіе число, узнаю сколь велика должна быть часть каждаго человѣка, когда бы они всѣ находились на лицо. По томъ раздѣливъ опять 175 на то же число, уменьшенное двумя, узнаю настоящую часть каждаго получившаго. Наконецъ уменьшивъ второе частное 10 рублями, я долженъ получить остатокъ равный первому частному. Станемъ поступать по сему разсужденію, представивъ чрезъ x искомое число.

Естьлибъ всѣ люди были на лицо, то часть каждаго должна состоять изъ $\frac{175}{x}$; но какъ двухъ нѣтъ, то часть каждаго получившаго будетъ $\frac{175}{x-2}$; при томъ же послѣднее число сіе по положенію 10 больше перваго, слѣд. $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Для рѣшенія сей эквацїи, уничтожаю знаменателей, и по замѣчанію (59) пишу $175x - 10(x-2)x = 175 \times (x-2)$; потомъ произвожу показанныя дѣйствія и нахожу $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$, или $10xx - 20x = 350$, наконецъ раздѣливъ на 10, вывожу $xx - 2x = 35$ такое уравненіе, въ которомъ стоитъ только употребить предписанное правило (87). И такъ взявъ половину -1 изъ множителя -2 втораго члена x, прибавляю квадратъ сей половины $+1$ къ обѣимъ частямъ уравненія, послѣ чего оно превращается въ $x^2 - 2x + 1 = 36$; извлекаю квадратной корень, и нахожу $x - 1 = \pm 6$; слѣд $x = \pm 6 + 1$, то есть, $x = 7$ и $x = -5$. Первая величина x будетъ требуемая, потому что 175, раздѣленное на 7, даетъ 25, и 175, раздѣленное на $7 - 2$ или на 5, равно 35 числу, которое превосходитъ 25 десятью. Чтожъ касается до второй, то она разрѣшаетъ другой вопросъ такой, которымъ предлагается раздѣлить 175 руб. съ двумя лишними человѣками; и слѣд. въ такомъ случаѣ часть каждаго должна уменьшиться 10 рублями.

Вопросъ III. *Нѣкто купилъ лошадь, и по нѣкоторомъ времени продалъ ее за 24 рубля. При сей продажѣ онъ потерялъ на 100 столько, чего стоила ему лошадь. Спрашивается, за сколько купилъ ее самъ продавецъ?*

Естьли мнѣ будетъ извѣстно, чего стоила лошадь, то повѣрю такъ. Вычту цѣну сію изъ 100, и здѣлаю слѣдующую посылку: *какъ 100 содержится къ найденному остатку, такъ искомая цѣна къ 24.* Представимъ искомое число чрезъ x, и пропорція изо-

бразится чрезъ 100 : 100 — x = x : 24; слѣд. . . . .

$$\frac{100x - xx}{100} = 24.$$

Для рѣшенія сей эквацiи уничтожаю знаменателя, и получаю $100x - xx = 2400$, или по перемѣнѣ знаковъ $xx - 100x = - 2400$. Взявши половину (87) изъ — 100, что есть, — 50, прибавлю квадратъ его + 2500 къ каждой части, отъ чего уравненіе перемѣнится въ $x^2 - 100x + 2500 = 100$; извлеку квадратной корень, и найду $x - 50 = \pm 10$; слѣд. $x = \pm 10 + 50$, и имѣетъ двѣ величины $x = 60$, и $x = 40$, изъ которыхъ каждая рѣшитъ данной вопросъ. Такимъ образомъ цѣна лошади можетъ равно состоять изъ 60 или 40 рублей; ибо ничто не опредѣляетъ здѣсь, какая больше приличествуетъ вопросу. Повѣряя найдемъ для 60, что 100 : 40 = 60 : 24; а для 40, 100 : 60 = 40 : 24.

90. Въ предыдущихъ вопросахъ каждое уравненіе состояло изъ двухъ рѣшеній, именно, изъ одного положительнаго, а другаго отрицательнаго. Въ послѣднемъ оно имѣетъ два положительныя, и можетъ состоять также изъ двухъ отрицательныхъ. Но сіе случается тогда только, когда вопросъ данъ не исправно; ибо въ такомъ случаѣ каждое отрицательное рѣшеніе покажетъ (62), что неизвѣстное должно быть взято въ противномъ смыслѣ и не въ силу вопроса.

На примѣръ, естьли будетъ данъ слѣдующій вопросъ: *Найти такое число, котораго бы квадратъ, сложенный съ тѣмъ же числомъ, взятымъ 9 разъ и еще съ 50, далъ въ суммѣ 30?*

То представивъ данной вопросъ въ эквацiи, получу $x^2 + 9x + 50 = 30$; уравненіе сіе по изъяснен-

чымЪ выше правиламЪ перемѣнится вЪ $x^2 + 9x = - 20$, потомЪ вЪ $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; по извлеченіи квадратнаго корня $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, и слѣд. $x = - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = - 4$, и $x = - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = - 5$. Величины сіи показываютЪ, что вопросЪ долженЪ перемѣниться вЪ слѣдующій другой: *Найти число, котораго естьли кЪ квадрату прибавишь 50, и потомЪ изЪ суммы вычтешь тоже число, взятое 9 разЪ, то вЪ остаткѣ должно выйти 30?*

91. Алгебра имѣетЪ не только то преимущество, что разрѣшаетЪ вопросы, но и еще показываетЪ, исправно ли оные даны и естьли возможность ихЪ рѣшить. Замѣчаніе на сіе здѣлано было (85).

А чтобЪ увѣриться на самомЪ дѣлѣ, то перерѣши третій вопросЪ, положивЪ вмѣсто 24 рублей 26. Уравненіе вЪ такомЪ случаѣ будетЪ $\frac{100x - xx}{100} = 26$, или $100x - xx = 2600$, или $xx - 100x = - 2600$, которое по правилу (87) перемѣнится вЪ $xx - 100x + 2500 = - 2600 + 2500 = - 100$; по извлеченіи квадратнаго корня вЪ $x - 50 = \pm \sqrt{- 100}$ и наконецЪ вЪ $x = 50 \pm \sqrt{- 100}$; но мы видѣли (85), что не можно извлечь квадратнаго корня изЪ отрицательнаго количества.

ВопросЪ IV. *Два товарища положили вЪ торгЪ по нѣкоторому капиталу: первой 300 рублей на 17 мѣсяцовЪ, второй, спустя 5 мѣсяцовЪ послѣ, неизвѣстную сумму, и слѣд. сумма втораго была вЪ торгу только 12 мѣсяцовЪ или одинЪ годЪ. По здѣланномЪ между ими ращетѣ, капиталЪ втораго сЪ барышомЪ обратился вЪ 260 руб. общій барышЪ состоялЪ изЪ 187 $\frac{1}{2}$ рублей. Спрашивается, какую сумму положилЪ второй, и какЪ великЪ барышЪ каждаго?*

Для рѣшенія сего вопроса стоитъ только узнать сумму положенныхъ денегъ вторымъ товарищемъ; ибо сыскавши ее, не трудно послѣ опредѣлить барышъ каждаго. Представимъ сумму сію или число рублей, отданныхъ въ торгъ вторымъ товарищемъ чрезъ x. А какъ 300 рублей положены первымъ на 17 мѣсяцовъ, то они должны принести барыша столько, сколько 300 руб. взятые 17 разъ, или 5100 руб. могутъ принести въ одинъ мѣсяцъ.

Равнымъ образомъ капиталъ втораго, поелику отданъ на 12 мѣсяцовъ, долженъ принести столько, сколько могутъ принести $12x$ рублей въ одинъ мѣсяцъ. И такъ можно по допущеніи сего почитать, что торгъ продолжался одинъ только мѣсяцъ, принимая за капиталы 5100 и $12x$; и слѣд. для опредѣленія барыша втораго товарища, надлежитъ (*Арие.* 187) найти четвертой членъ въ слѣдующей пропорціи $5100 + 12x : 187\frac{1}{2} = 12x :$

Сей четвертой членъ будетъ $\frac{12x \times 187\frac{1}{2}}{5100 + 12x}$, или $\frac{2250x}{5100 + 12x}$; но въ силу вопроса барышъ втораго товарища съ капиталомъ его x долженъ состоять изъ 260 рублей; слѣд. $\frac{2250x}{5100 + 12x} + x = 260$.

Для рѣшенія сей эквацїи уничтожаю знаменателя, и получаю $2250x + x(5100 + 12x) = 260(5100 + 12x)$, или по совершеніи показанныхъ умноженій $2250x + 5100x + 12xx = 1326000 + 3120x$; по переставкѣ членовъ и по приведеніи $12x + 4230x = 1326000$; по раздѣленіи всѣхъ членовъ на 12, $x^2 + \frac{4230}{12}x = \frac{1326000}{12}$, или $x^2 + \frac{705}{2}x = 110500$; по томъ взявши половину изъ $\frac{705}{2}$, которая будетъ $\frac{705}{4}$, составивъ изъ сей половины квадратъ и прибавивъ оной къ обѣ-

имѣ частямѣ уравненія, выведу $x^2 + \frac{705}{2}x + \dots$ $\frac{497025}{16} = 110500 + \frac{497025}{16} = \frac{2265025}{16}$. Наконецѣ по извлеченіи квадратнаго корня, найду $x + \frac{705}{4} = \dots$ $\pm\sqrt{\frac{2265025}{16}} = \pm\frac{1505}{4}$; слѣд. $x = -\frac{705}{4} \pm \frac{1505}{4}$. По сему уравненію заключаю, что одна только величина можетѣ приличествовать вопросу, именно $x = -\frac{705 + 1505}{4} = \frac{800}{4} = 200$; и слѣд. капиталѣ втораго товарища состоитѣ изѣ 200 рублей, барышѣ его изѣ 60, а барышѣ перваго изѣ $127\frac{1}{2}$.

92. Правило для литтеральныхѣ уравненій служитѣ тоже.

Естьли будетѣ дано рѣшить слѣдующую эквацію $abx - axx = b^2c$, то вѣ сходственность (86 и 87) превращу ее вѣ $axx - abx = -b^2c$, по томѣ вѣ $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; прибавлю кѣ каждой части сего послѣдняго уравненія по квадрату изѣ $-\frac{b}{2}$, то есть, по $+\frac{bb}{4}$ и получу $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; извлеку квадратной корень, и найду $x - \frac{b}{2} = \dots$ $\pm\sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$, наконецѣ $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

93. Когда литтеральное уравненіе будетѣ состоять изѣ многихѣ членовѣ, то

можно приводить его въ трехчленное слѣдующимъ образомъ.

Пусть данное уравненіе будетъ такое $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Переношу въ одну часть всѣ члены съ x, и пишу рядомъ всѣ тѣ, которые находятся въ одной степени, изъ чего произходитъ $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Теперь примѣчаю, что $ax^2 - bx^2$ представляетъ тожъ, что $(a-b) \times x^2$ или $(a-b)x^2$, равномѣрно $bcx + acx$ показываетъ тоже, что $(bc + ac)x$; такимъ образомъ эквація $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ можетъ перемѣниться въ слѣдующую $(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$. Но какъ количества a, b, c извѣстны, то должно почитать за извѣстныя и всѣ количества $a-b$, $bc+ac$ и $a^2b - ab^2$; слѣд. для сокращенія можно каждое изъ нихъ представить одною буквою, положивъ $a-b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, послѣ чего эквація приведена будетъ въ такой видъ $mx^2 + nx = p$, въ какомъ разсматривали мы предыдущія; слѣд. разрѣшая ее, получимъ напередъ $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, по томъ $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (чрезъ прибавленіе квадрата изъ половины $\frac{n}{m}$, то есть, изъ $\frac{n}{2m}$); по извлеченіи квадратнаго корня $x + \frac{n}{2m} = \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; и наконецъ $x = \frac{-n}{2m} \pm \ldots \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$.

94. Впрочемъ такія перемѣны дѣлаются только въ однихъ весьма сложныхъ или въ збивчивыхъ выкладкахъ; чтожъ касается до нетрудныхъ, то можно и безъ нихъ обойтися; на примѣръ, въ предыдущемъ случаѣ, по представленіи данной эквацiи въ видѣ $(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$, можно трактовать ее, какъ и прежнія, безъ большой выкладки, раздѣливъ всѣ члены на $a-b$; отъ

чего произойдетъ $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b} x = \frac{a^2 b - ab^2}{a - b}$; потомъ прибавивъ къ каждой части по квадрату половины $\frac{bc + ac}{a - b}$, то есть, по квадрату изъ $\frac{bc + ac}{2a - 2b}$; но можно, не составляя сего квадрата, прибавить его въ одномъ показанiи, именно, въ такомъ видѣ $\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2$; и слѣд. по прибавленiи сего квадрата уравненiе превратится въ $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b} x + \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 = \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2 b - ab^2}{a - b}$, по извлеченiи квадратнаго корня въ $x + \frac{bc + ac}{2a - 2b} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2 b - ab^2}{a - b}\right]}$, и наконецъ въ $x = - \frac{bc - ac}{2a - 2b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2 b - ab^2}{a - b}\right]}$.

О составленiи Степеней изъ одночленныхъ количествъ, о извлеченiи Корней ихъ, и о представленiи Радикальныхъ знаковъ и Показателей.

95. Сказано выше, что *степенью* количества называются произведенiя того же количества, помноженнаго на самаго себя нѣсколько разъ. a^3 есть третья степень или кубъ количества a, потому что a^3 выходитъ изъ $a \times a \times a$. Умножаемое количество бываетъ столько разъ производителемъ

или факторомъ въ степени, сколько находится единицъ въ показателѣ той степени.

На примѣръ въ a^5, a находится пять разъ производителемъ, а въ $(a+b)^6$, $a+b$ есть шесть разъ.

96. Поелику для умноженія одночленныхъ литтеральныхъ количествъ съ показателями должно (20) сложить показателя каждой множимой буквы съ показателемъ каждой подобной буквы множителя; то слѣдуетъ изъ сего, что для *возведенія въ какую нибудь степень одночленнаго количества, надлежитъ умножить настоящаго показателя каждой буквы на число, означающее, въ какую степень требуется возвести данное количество.* Назовемъ число сіе *показателемъ степени.*

Такимъ образомъ для составленія изъ a^2b^3c четвертой степени, напишу $a^8b^{12}c^4$, умноживъ показателей 2, 3 и 1 количествъ a, b, c на показателя 4 степени, въ которую требуется возвести a^2b^3c. Ибо для составленія изъ a^2b^3c четвертой степени, надлежитъ умножить a^2b^3c на a^2b^3c, по томъ произведеніе на a^2b^3c, второе произведеніе опять на a^2b^3c; но для совершенія сихъ умноженій должно (20) сложить показателей; при томъ же, какъ показатели сіи остаются тѣже въ каждомъ производителѣ, то должно сложить каждаго показателя три раза съ самимъ собою, то есть, умножить его на 4. Разсужденіе сіе служитъ для всякой другой степени одночленнаго количества.

Когда случится производить съ показателями количествъ разсужденія или дѣйствія,

не зависящія отъ особенныхъ извѣстныхъ величинъ тѣхъ показателей, но отъ такихъ, которыя служатъ вообще для показателей всякаго роду; тогда изображаются сіи показатели буквами.

На примѣръ, для возведенія всякаго количества $a^m b^n c^p$ въ какую нибудь степень, вообще изображенную чрезъ r, должно написать $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

97. Естьли количество, возвышаемое въ данную степень, будетъ дробь, то должно составить степень сію какъ изъ числителя, такъ и знаменателя.

На примѣръ $\frac{a^2b^3}{cd^2}$, возведенное въ пятую степень, изобразится чрезъ $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$; равномѣрно для составленія изъ $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ степени r, должно написать $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

98. Естьли при количествѣ будетъ находиться коеффиціентъ, то должно составить изъ него также требуемую степень, умноживъ его на самаго себя по правиламъ Ариѳметики.

На примѣръ изъ $4a^3b^2$, пятая степень будетъ $1024a^{15}b^{10}$.

Иногда при таком составленіи довольно одного показанія, какъ и въ буквахъ.

И для того можно написать $4^5 a^{15} b^{10}$.

99. Что касается до знаковъ, то во всѣхъ степеняхъ, имѣющихъ парнаго показателя, ставится знакъ +; но въ степеняхъ съ нечетнымъ показателемъ ставится или + или —, глядя по составляемому количеству, съ какимъ знакомъ оно находится съ + или —. Истинна сего выводится непосредственно изъ предписаннаго (24) для знаковъ правила.

100. Слѣдуетъ изъ всего сказаннаго теперь, что показатель каждой буквы во всякой степени содержитъ въ себѣ показателя своего корня или радикса столько, сколько находится единицъ въ показателѣ трактуемой степени; на пр. въ четвертой степени показатель каждой буквы въ четверо будетъ больше того, какой былъ въ коренномъ количествѣ.

101. И такъ, *чтобъ извлечь корень данной степени изъ всякаго одночленнаго количества, должно раздѣлить показателя каждой его буквы на число из-*

влекаемой степени. Число сіе называется *показателемъ корня.*

Напримѣръ, для извлеченія третьяго или кубическаго корня изъ $a^{12}b^{6}c^{3}$ раздѣлю показателя каждой буквы на 3, и напишу $a^{4}b^{2}c$. Равномѣрно для извлеченія пятаго корня $a^{20}b^{15}c^{5}$ раздѣлю каждаго показателя на 5, отъ чего выдетъ $a^{4}b^{3}c$. И вообще для извлеченія корня степени r изъ количества $a^{m}\ b^{n}$ должно написать $a^{\frac{m}{r}}\ b^{\frac{n}{r}}$.

102. Знакъ въ корнѣ четной степени поставляется + или − произвольно; но въ нечетной степени корень сохраняетъ знакъ самаго количества.

Такимъ образомъ квадратной корень изъ $a^{6}\ b^{4}$ будетъ $\pm a^{3}\ b^{2}$; корень пятой степени изъ $-a^{5}\ b^{10}$ будетъ $-ab^{2}$.

103. Когда извлекаемое количество будетъ дробь, тогда извлекается корень порознь изъ числителя и изъ знаменателя.

104. Когда будутъ при количествахъ коеффиціенты, то квадратной или кубической корень извлекается изъ нихъ по правиламъ Ариѳметики, а прочихъ вышнихъ степеней по показаннымъ ниже.

105. Когда показатель извлекаемаго корня не дѣлитъ наравно каждаго показателя даннаго количества, то это знакъ, что ко-

личество не представляетъ совершенной степени. Въ такомъ случаѣ показатель остается дробнымъ.

На примѣръ, желая извлечь кубической корень изъ $a^9 b^3 c^4$, пишу $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$, или $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, гдѣ показатель $\frac{1}{3}$ значитъ, что остается еще извлечь кубической корень изъ количества c.

106. Извлеченія корней вышнихъ степеней изображаются тѣмъ же знакомъ $\sqrt{}$; только въ отверстіи его полагается число, означающее степень извлекаемаго корня.

На примѣръ $\sqrt[3]{a}$ показываетъ кубической корень изъ a; $\sqrt[7]{a}$ значитъ седьмой корень изъ a; слѣд. должно почитать сіи два изображенія $\sqrt[3]{a}$ и $a^{\frac{1}{3}}$ за одно; равнымъ образомъ $\sqrt[5]{a^4}$ и $a^{\frac{4}{5}}$ должно почитать одинакими количествами.

107. По сдѣланному (105) замѣчанію можно приводить въ простѣйшее значеніе радикальныя количества, или тѣ, при которыхъ находится знакъ $\sqrt{}$.

На примѣръ, естьли дано будетъ $\sqrt[3]{a^4 b^5}$, то какъ сіе количество равно $a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}$ или $a a^{\frac{1}{3}}\ b b^{\frac{2}{3}}$, изъ которыхъ послѣднее изображеніе значитъ тоже (105).

что $ab\sqrt[3]{ab^2}$; слѣд. можно заключить, что $\sqrt[3]{a^4b^5} = ab\sqrt[3]{ab^2}$.

Равномѣрно $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\sqrt{\frac{a}{f}}$; а по умноженіи числителя и знаменателя на $\sqrt{f}$, произойдетъ $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3f}{f^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}f^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{2}{2}}} = \frac{a}{f}a^{\frac{1}{2}}f^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$.

108. Естьли случится коеффиціентъ, не представляющій совершенной степени, то должно раздроблять его на факторы, изъ которыхъ бы одинъ представлялъ совершенную степень извлекаемаго корня; потомъ производить дѣйствіе, какъ показано въ предыдущихъ примѣрахъ.

На примѣръ данное количество $\sqrt{48a^2b^3}$ можно перемѣнить на $\sqrt{3 \times 16a^2b^3}$, или $\sqrt{3 \times 4^2a^2b^3}$, а сіе на $4ab\sqrt{3b}$. Равномѣрно $\sqrt[3]{81a^5b^4} = \sqrt[3]{3 \times 27a^5b^4} = 3ab\sqrt[3]{3a^2b}$.

109. При извлеченіи даннаго корня изъ разнороднаго количества, не должно дѣлить каждаго показателя его, но почитать всѣ части его за одно количество, которому показателемъ служитъ 1; сія единица дѣлится на показателя извлекаемаго корня, что собственно производится однимъ паказаніемъ.

На примѣръ вмѣсто количества $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$, представляющаго ничто другое, какъ $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^1}$, пишется $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$ или $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Естьли количество, находящееся съ радикаломъ, будетъ имѣть при томъ показателя, то должно сего показателя раздѣлить на показателя извлекаемой степени.

На примѣръ въ мѣсто $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$ можно написать $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$.

110. Естьли радикальныя количества бываютъ не подобны, то сложеніе и вычитаніе ихъ производится чрезъ соединеніе знаками; когдажъ они подобны, то коеффиціенты ихъ складываются или вычитаются обыкновеннымъ образомъ.

На примѣръ для сложенія $\sqrt[3]{a}$ съ $\sqrt[4]{b}$, должно написать $\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}$. Для вычитанія $7a\sqrt[3]{b}$ изъ $9a\sqrt[3]{b}$ напиши $2a\sqrt[3]{b}$.

111. Для умноженія или дѣленія радикальныхъ количествъ одной степени производи дѣйствіе, какъ бы не было радикала; и потомъ въ произведеніи или въ частномъ поставь тотъ же радикалъ.

На примѣръ $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a\sqrt[7]{a}$; $\sqrt[5]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{a^5b^5} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \ldots \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5b}{a}} = \sqrt[5]{a^4b}$.

Равномѣрно $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{(-ab)}$; и $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{(-a \times -b)} = -\sqrt{(ab)}$.

Для послѣдняго сего примѣра нужно изъясненіе: казалось бы, что $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)}$ должно по правилу дать $\sqrt{(-a \times -b)}$ или $\sqrt{(+ab)}$ или $\sqrt{ab}$; а какъ притомъ всякой корень чотной степени имѣетъ (102) двойной знакъ $\pm$, то слѣдовало бы написать $\pm\sqrt{ab}$; но надлежитъ примѣтить здѣсь, что $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a}\sqrt{(-1)}$, и $\sqrt{(-b)} = \sqrt{b}\sqrt{(-1)}$: слѣд. $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\sqrt{b}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{ab}\sqrt{(-1)^2}$; однакожъ $\sqrt{(-1)^2}$ различествуетъ отъ ± 1; потому что настоящее свойство знака — въ $\sqrt{(-1)^2}$ показываетъ, по какому дѣйствію произошелъ квадратъ $(-1)^2$, изъ котораго должно извлекать корень.

112. Для раздѣленія $\sqrt[7]{a^5}$ на $\sqrt[7]{a^3}$, должно раздѣлить a^5 на a^3, и поставить предъ частнымъ a^2 радикалъ $\sqrt[7]{}$; отъ чего произойдетъ $\sqrt[7]{a^2}$.

Равномѣрно $\frac{\sqrt[5]{a^4b^3}}{\sqrt[5]{a^2b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b^3}{a^2b}} = \sqrt[5]{a^2b^2}$; $\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} =$ $\frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} =$ $\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; ибо пятой корень изъ 1 есть 1. Вообще всякая степень и всякой корень изъ единицы есть единица.

113. Естьли потребуется возвести количество съ радикальнымъ знакомъ въ такую степень, которой показатель равенъ показателю радикала, то должно въ такомъ случаѣ уничтожить радикалъ; такимъ образомъ $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; сіе явствуетъ изъ того, что количество приводится чрезъ такое дѣйствіе въ первое свое состояніе.

Для возведенія одночленнаго количества съ радикальнымъ знакомъ въ какую нибудь степень, должно составить требуемую степень изъ каждаго его фактора по предписанному (96) правилу.

На примѣръ количество $\sqrt[7]{a^2b^3}$, возведенное въ четвертую степень, даетъ $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, а по приведеніи $ab\sqrt[7]{ab^5}$. Въ этомъ увѣриться можно еще и такъ: $\sqrt[7]{a^2b^3}$ есть тоже (106), что $a^{\frac{2}{7}}\ b^{\frac{3}{7}}$; слѣд. для

составленія изъ сего послѣдняго количества четвертой степени, надлежитъ умножить показателей его на 4; отъ чего произойдетъ $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = aba^{\frac{1}{7}} b^{\frac{5}{7}}$ $= ab\sqrt[7]{ab^5}$.

114. **Для извлеченія всякаго корня изъ количества съ радикальнымъ знакомъ, должно умножить радикальнаго показателя на показателя новаго корня.**

На примѣръ для извлеченія кубическаго корня изъ $\sqrt[5]{a^4}$, напишу $\sqrt[15]{a^4}$, умноживъ 5 на 3. Ибо $\sqrt[5]{a^4}$ $= a^{\frac{4}{5}}$; но (101) при извлеченіи третьяго корня изъ $a^{\frac{4}{5}}$, надобно раздѣлить показателя его на 3, отъ чего произойдетъ $a^{\frac{4}{15}}$ тоже, что $\sqrt[15]{a^4}$.

115. **Когда данныя количества съ радикалами не будутъ всѣ одной степени, то для произведенія надъ ними дѣйствій умноженія и дѣленія, надлежитъ приводить ихъ къ одинакой степени, что здѣлай по слѣдующему правилу.**

Естьли будутъ два радикальныя количества, то умножь показателя одного радикала на показателя другаго; произведеніе будетъ служить общимъ показателемъ обоихъ радикаловъ: составь потомъ изъ каждаго количества степень,

которая означается показателемъ другаго радикала.

На примѣръ для приведенія къ одинакому радикалу двухъ количествъ $\sqrt[5]{a^3}$ и $\sqrt[7]{a^4}$, умножаю 5 на 7, и получаю 35 показателемъ новаго радикальнаго знака, которой будетъ $\sqrt[35]{}$; составляю изъ a^3 седьмую степень, и изъ a^4 пятую, отъ чего выходитъ a^{21} и a^{20}: такимъ образомъ данныя количества перемѣнятся въ $\sqrt[35]{a^{21}}$ и $\sqrt[35]{a^{20}}$.

Когда же будетъ находиться больше двухъ радикальныхъ количествъ, то должно умножить между собою показателей всѣхъ радикаловъ, и произведеніе ихъ почитать общимъ показателемъ новаго радикала; потомъ составить изъ каждаго количества степень, означенную произведеніемъ радикальныхъ показателей, кромѣ умножаемаго.

Для приведенія къ одному радикалу данныхъ количествъ $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ и $\sqrt[8]{a^7}$, умножу трехъ показателей между собою 5, 7 и 8; отъ чего произойдетъ 280, общій показатель новыхъ радикальныхъ знаковъ; составлю изъ a^3 7×8 или 56 тую степень, изъ a^2 5×8 или 40 вую, изъ a^7 5×7 или 35 тую; отъ чего произойдетъ $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

Въ справедливости правила сего можно увѣриться первымъ примѣромъ; ибо возводя a^3 въ седьмую степень, дѣлаемъ a семь разъ факторомъ больше прежняго. Но поелику

вЪ самое тоже время увеличиваемЪ показателя радикальнаго знака вЪ семь разЪ больше, то одно другимЪ замѣняется безЪ всякой перемѣны вЪ величинѣ.

116. Можно заключить изЪ сего разсужденія, что показатель количества и показатель радикала его могутЪ имѣть общаго дѣлителя; и слѣд. такое количество можно представить иногда вЪ простѣйшемЪ значеніи, раздѣливЪ обоихЪ показателей на общаго дѣлителя.

На примѣрЪ $\sqrt[12]{a^8}$ можетЪ перемѣниться вЪ $\sqrt[3]{a^2}$ чрезЪ раздѣленіе 12 и 8 на 4. Равномѣрно $\sqrt[4]{a^2}$ превращается вЪ $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ превращается вЪ $\sqrt{a}$.

117. Заключимъ еще, что вЪ количествахЪ, имѣющихЪ показателемЪ извлекаемаго корня такое число, которое состоитЪ изЪ произведенія двухЪ или многихЪ чиселЪ, можно здѣлать извлеченіе другимЪ образомЪ такЪ.

ПоложимЪ, что требуется извлечь шестой корень изЪ a^{24}; могу сначала извлечь квадратной корень, по томЪ кубической, и получу шестой корень. Ибо $\sqrt[6]{a^{24}}$ превращается во первыхЪ (116) вЪ $\sqrt[3]{a^{12}}$, по томЪ вЪ $\sqrt[1]{a^4}$, или вЪ a^4; а сіе равно произошлобы и тогда, когдабы извлеченЪ былЪ вдругЪ шестой корень изЪ a^{24} чрезЪ раздѣленіе показателя 24 на 6.

Впрочемъ, поелику дробные показатели заступаютъ мѣсто радикаловъ, и какъ первые способнѣе употребляются въ изчисленіяхъ; то посудимъ еще о представленіи показателей.

Естьли дано будетъ умножить $\sqrt[5]{a^3}$ на $\sqrt[5]{a^4}$, то перемѣню изображеніе сіе на слѣдующее другое $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, изъ котораго (20) произойдетъ $a^{\frac{7}{5}}$ или $aa^{\frac{2}{5}}$, или напослѣдокъ по приведеніи $a\sqrt[5]{a^2}$. Для умноженія $\sqrt[5]{a^3}$ на $\sqrt[7]{a^4}$ напишу $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$, или $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, а по приведеніи двухъ дробей къ одному знаменателю $a^{\frac{21+20}{35}}$ или $a^{\frac{41}{35}}$, что превращается въ $aa^{\frac{6}{35}}$, или наконецъ въ $a\sqrt[35]{a^6}$.

Вообще количество $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ перемѣняется въ $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$, а сіе въ $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, или по приведеніи къ одному знаменателю въ $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, напослѣдокъ (105) въ $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$.

Тожъ происходитъ и въ дѣленіи; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ перемѣняется въ $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}}$, или (31) въ $a^{\frac{1}{5}}$, или наконецъ въ $\sqrt[5]{a}$; равномѣрно $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ превращается въ $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = \dots$

$a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}} b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$, или по приведеніи дробей къ одному знаменателю $a^{\frac{23-10}{35}} b^{\frac{28-15}{35}}$, по совершеніи вычитанія выходитъ $a^{\frac{13}{35}} b^{\frac{13}{35}}$ одинакое изображеніе съ $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$.

Вообще $\dfrac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \dfrac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} =$

$a^{\frac{qn-mr}{qm}} b^{\frac{pq-ms}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}$.

118. Въ послѣднемъ семъ примѣрѣ вычитали мы показателя каждой буквы знаменателя изъ показателя соотвѣтствующей буквы числителя. Предписанное (31) правило для дѣленія, кажется, не позволяетъ сего дѣлать, когда показатель числителя бываетъ меньше знаменателя; однако вообще можно дѣлать такое вычитаніе, только къ излишку надлежитъ приписывать знакъ —; въ Алгебрѣ всякая дробь можетъ превратиться въ цѣлое.

На примѣръ вмѣсто $\frac{a^7}{b^2}$ можно написать $a^3 b^{-2}$; ибо по свойству дѣленія дѣлитель уничтожаетъ въ дѣлимомъ всѣхъ своихъ производителей; въ количествѣ $\frac{a^5}{a^2}$ равномъ a^3, дѣлитель a^2 уничтожаетъ въ a^5 двухъ факторовъ равныхъ a. Равномѣрно въ количествѣ $\frac{a^3}{b^2}$, дѣлитель b^2 долженъ уничтожить въ a^3 двухъ факторовъ равныхъ b; хотя же сіи факторы находятся скрыты, со всѣмъ тѣмъ можно ихъ

представить: ибо a безъ сомнѣнія содержитъ въ себѣ b нѣкоторое число разъ цѣлое или дробное, и пусть будетъ сіе число разъ равно m, тогда $a = mb$; слѣд. количество $\frac{a^3}{b^2}$ должно быть равно $\frac{m^3 b^3}{b^2}$ или по приведеніи $m^3 b$; но количество $a^3 b^{-2}$ въ такомъ случаѣ становится равно $m^3 b^3 b^{-2}$, или (20) $m^3 b^{3-2}$, то есть $m^3 b$; слѣд. $\frac{a^3}{b^2}$ представляетъ то же, что $a^3 b^{-2}$.

И такъ вообще *можно ставить всегда знаменателя съ числителемъ рядомъ въ видѣ фактора, только съ противнымъ знакомъ показателя его.*

Почему вмѣсто $\frac{1}{a^3}$ можно написать $1 \times a^{-3}$, или просто a^{-3}; вмѣсто $\frac{1}{a^m}$, можно написать a^{-m}. Вмѣсто $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ можно поставить $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$; вмѣсто $\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}$ можно написать $(a^3 + b^3) \times (a^2 + b^2)^{-1}$; и слѣд. заключая по сему правилу количество . . . $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}}$ можно представить чрезъ $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$, или наконецъ чрезъ $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

119. И обратно *въ количествѣ, состоящемъ изъ нѣкоторыхъ отрицательныхъ частей, отрицательныя части могутъ перемѣниться въ знаменателя съ положительными показателями.*

На примѣръ вмѣсто $a^3 b^{-4}$ можно написать $\frac{a^3}{b^4}$; вмѣсто a^{m-3} равнаго $a^m \times a^{-3}$, можно поставить $\frac{a^m}{a^3}$, и такъ и проч.

О составленіи Степеней изъ разнородныхъ или многочленныхъ количествъ, и о извлеченіи Корней ихъ.

120. По данному понятію о степеняхъ надлежитъ для возведенія многочленнаго количества въ требуемую степень, умножить его самаго на себя столько разъ, сколько находится единицъ въ показателѣ той степени; но ограничиваясь на такомъ способѣ, принуждены будемъ дѣлать часто весьма продолжительныя выкладки для полученія желаемыхъ результатовъ, которые можно сыскивать съ меньшимъ трудомъ, естьли посмотримъ на свойства произведеній, которыя выходятъ изъ умноженій такого рода.

Займемся съ начала степенями двучленныхъ количествъ, потому что они могутъ руководствовать къ составленію степеней и изъ многочленныхъ; а дабы обнять и почувствовать силу всего того, о чемъ мы предлагать намѣрены, то поворотимся нѣсколько назадъ, и разсмотримъ, какого свойства бываютъ произведенія, выводимыя изъ попе-

ремѣннаго умноженія нѣсколькихъ двучленныхъ факторовъ, изъ коихъ всѣ одинъ членъ имѣютъ общій; такое изслѣдованіе можетъ привести насъ прямо къ нашей цѣли, и снабдить нѣкоторыми предложеніями, весьма полезными впередъ.

121. Пусть будутъ $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ и проч. многія двучленныя количества, имѣющія общимъ членомъ x, и которыя должно умножить между собою.

Изъ умноженія $x + a$
на - - - $x + b$

выходитъ - - $x^2 + ax + ab$
$+ bx$

Изъ умноженія сего произведенія на $x + c$, выходитъ - - -

$$\begin{array}{llll} x^3 & + ax^2 & + abx & + abc \\ & + bx^2 & + acx & \\ & + cx^2 & + bcx & \end{array}$$

А по умноженіи сего втораго произведенія на $x + d$, выходитъ - - -

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx & + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx & \\ & + cx^3 & + adx^2 & + acdx & \\ & + dx^3 & + bcx^2 & + bcdx & \\ & & + bdx^2 & & \\ & & + cdx^2 & & \end{array}$$

И такъ далѣе. Изъ сего можно вывести слѣдующія замѣчанія, что . . . .

1^{e}. Въ каждомъ произведеніи остается первымъ членомъ количество x, возведенное въ такую степень, которая означается числомъ данныхъ двучленныхъ количествъ, такъ что ежели бы число ихъ было m, то первый членъ произведенія вышелъ бы x^m.

2^{e}. Степени x начинаютъ уменьшаться единицею до послѣдняго члена, въ которомъ x не содержится болѣе.

3^{e}. Множители каждой степени количества x (которые впередъ называть будемъ множителями тѣхъ членовъ, гдѣ заключаются степени) состоятъ во второмъ членѣ изъ суммы вторыхъ членовъ a, b, c и проч. всѣхъ двучастныхъ количествъ; въ третьемъ изъ суммы произведеній тѣхъ же количествъ a, b, c и проч., умноженныхъ между собою по два; въ четвертомъ изъ суммы произведеній тѣхъ же количествъ a, b, c и проч. умноженныхъ по три, и такъ далѣе до послѣдняго члена, которой состоитъ изъ произведенія всѣхъ количествъ a, b, c и проч. Заключенія сіи неоспоримы и всегда одинаковы, какое бы не было число умноженныхъ количествъ $x + a$, $x + b$ и проч.

122. Естьли положимъ, что всѣ количества a, b, c и проч. равны между собою, то всѣ двучленныя умножаемыя будутъ равны также, и слѣд. найденныя выше произведенія будутъ послѣдовательныя степени изъ каждаго двучастнаго количества $x + a$; на пр. ежели положимъ, что каждое количество b, c, d и проч. будетъ равно a, и когда во всѣхъ произведеніяхъ, вмѣсто каждой буквы b, c, d и проч. поставится a, то слѣдующія произойдутъ результаты для величинъ степеней, означенныхъ по сторону.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$
$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^2x + a^4 = (x + a)^4$$

Отсюда видѣть можно, что естьли бы показатель составляемой степени былъ m, то всѣ послѣдовательныя степени количества x были бы x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, и проч.

Но не льзя съ такою очевидностію примѣтить того, какъ выходятъ коеффиціенты разныхъ членовъ, и какая ихъ зависимость отъ показателя m, хотя они непремѣнно должны зависѣть отъ него: что мы теперь и станемъ разсматривать.

123. Дабы увѣриться, какимъ законамъ послѣдуютъ коеффиціенты, возвратимся къ прежнимъ сысканнымъ нами произведеніямъ, и замѣтимъ, что множитель втораго члена (когда всѣ количества a, b, c и проч. будутъ предположены равными a), долженъ состоять изъ a, взятаго столько разъ, сколько находится количествъ, потому что онъ состоитъ, какъ мы видѣли выше, изъ суммы сихъ количествъ; слѣд. когда число сихъ количествъ будетъ m, то множитель втораго члена будетъ ma, то есть, коеффиціентъ сего члена m будетъ равенъ показателю степени перваго члена. Сіе можно видѣть въ предложенныхъ ниже трехъ особенныхъ степеняхъ.

Посмотримъ теперь, какія должны происходить множители прочихъ членовъ. Явствуетъ, что всѣ произведенія ab, ac, ad, bc, bd, и проч. должны быть въ настоящемъ предположеніи равны a^2, равномѣрно abc, abd, и проч. должны быть по особенности равны a^3, и такъ далѣе. Слѣд. множитель третьяго члена состоитъ изъ a^2, взятаго столько разъ, сколько буквы a, b, c, d и проч. могутъ сдѣлать произведеній, умножены будучи по двѣ. Равномѣрно множитель четвертаго члена состоитъ изъ a^3, взятаго столько разъ, сколько могутъ

сдѣлать произведеній буквы a, b, c и проч., умноженныя по три, и такъ далѣе; слѣд. для сысканія въ числахъ коеффиціента третьяго, четвертаго и проч. членовъ въ степени m двучастнаго $x + a$, все дѣло состоитъ въ томъ, чтобъ опредѣлить, какое число m буквъ a, b, c и проч. можетъ сдѣлать разныхъ произведеній, когда буквы сіи будутъ умножены по двѣ, по три и проч.

124. Но замѣтимъ, что соединяя какое нибудь число m буквъ по двѣ, по три, по четыре и проч. безъ повторенія одной и той же буквы во всякомъ совокупленіи, замѣтимъ, говорю я, что - - - -

1^{е}. Число совокупленій по двѣ будетъ вдвое больше числа совершенно разныхъ произведеній. На примѣръ двѣ буквы a и b могутъ соединены быть между собою двоякимъ образомъ, то есть, ab и ba; но оба сіи совокупленія не дѣлаютъ двухъ разныхъ произведеній.

2^{е}. Число совокупленій многихъ буквъ по три будетъ въ шестеро больше числа разныхъ произведеній трехъ буквъ; ибо для соединенія трехъ количествъ a, b, c надлежитъ, по соединеніи двухъ какихъ нибудь, на примѣръ a и b, что сдѣлаетъ ab и ba,

соединить послѣ третью *c* съ каждымъ новымъ совокупленіемъ, то есть, расположить ее всячески съ буквами *a* и *b*, составившими *ab* и *ba*; но отъ сего происходитъ шесть совокуплений, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго расположенія *abc*, *acb*, *cab*, *bac*, *bca*, *cba*, и притомъ всѣ сіи шесть соединеній составляютъ одно произведеніе.

Такимъ же образомъ увѣряемся, что четыре количества составляютъ двадцать четыре совокупленія, изъ которыхъ каждое дѣлаетъ одинакое произведеніе; слѣд. число разныхъ произведеній, выводимое изъ соединенія многихъ буквъ по четыре, будетъ составлять 24тую часть всего числа совокупленій. Равномѣрно число разныхъ произведеній изъ совокупленія многихъ буквъ по пяти, по шести, по семи и проч. будетъ составлять сто двадцатую, семь сотъ двадцатую, пять тысячь сороковую и проч. часть цѣлаго числа совокупленій; то есть, вообще оно изображается дробью, которой числителемъ служитъ все число совокупленій, а знаменателемъ произведеніе всѣхъ чиселъ 1, 2, 3, 4 и проч., даже до того, которое показываетъ, изъ сколькихъ буквъ состоитъ каждое произведеніе.

125. Посмотримъ теперь, сколько совокупленій можетъ сдѣлать всякое число m буквъ a, b, c и проч. соединенныхъ по двѣ, по три, и проч.

Что касается до соединенія буквъ по двѣ, то изъ предыдущаго явствуетъ, что одна буква не можетъ соединиться съ собою, но соединяется съ числомъ $m - 1$ прочихъ буквъ, и слѣд. должна сдѣлать $m - 1$ совокупленій; а какъ находится всѣхъ буквъ число m, то онѣ должны здѣлать m разъ $(m - 1)$, или $m. (m - 1)$ соединеній. Слѣд. число разныхъ произведеній двухъ буквъ будетъ по объявленному (124) $m. \frac{m-1}{2}$.

Дабы получить число совокупленій m буквъ по три, надлежитъ каждое соединеніе ихъ по двѣ соединить съ каждою другою буквою, которая въ немъ не содержится, то есть, съ числомъ буквъ $m - 2$; слѣд. каждое сіе совокупленіе произведетъ $m - 2$ соединеній трехъ буквъ; а какъ находится $m (m - 1)$ совокупленій двухъ буквъ, изъ которыхъ каждое должно сдѣлать $m - 2$ соединеній по три буквы; слѣд. всѣхъ соединеній будетъ $m, (m - 1). (m - 2)$; но поелику число разныхъ произведеній (124) составляетъ шестую часть всего числа соеди-

веній; и потому оно будетЪ $m . \frac{(m-1).(m-2)}{6}$,
или $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3}$.

ТакимЪ же образомЪ доказано будетЪ, что число соединеній буквЪ по четыре будетЪ $m . (m-1) . (m-2) . (m-3)$; ибо надлежитЪ совокупить каждое соединеніе трехЪ буквЪ со всѣми прочими, которыя не заключаются вЪ немЪ; а какЪ число остальныхЪ буквЪ есть $m-3$, то для каждаго соединенія трехЪ буквЪ произойдетЪ $m-3$ новыхЪ соединеній по четыре буквы; слѣд. изобразивЪ число соединеній по три чрезЪ $m . (m-1) . (m-2)$, получимЪ за число совокупленій по четыре $m . (m-) . (m-2) . (m-3)$; а какЪ число разныхЪ произведеній четырехЪ буквЪ есть двадцать четвертая часть всѣхЪ соединеній; слѣд. оно должно состоять изЪ $m . \frac{(m-1)}{2} . \frac{(m-2)}{3} . \frac{(m-3)}{4}$.

Равномѣрно число разныхЪ произведеній, выводимое изЪ умноженія числа m буквЪ по пяти, по шести и проч. будетЪ изображаться чрезЪ $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5}$, чрезЪ $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5} . \frac{m-5}{6}$, и такЪ далѣе.

126. И такъ заключимъ изъ сего и изъ сказаннаго (122), что послѣдующіе члены двучастнаго количества $x + a$, возведеннаго въ степень m, или количества $(x + a)^m$ будутъ $x^m + max^{m-1} + m.\frac{m-1}{2} a^2x^{m-2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} a^3x^{m-3} +$ и проч.

То есть, первой членъ строки, изображающей сію степень представляетъ первой членъ x двучастнаго количества, возведенный въ степень m; потомъ показатели буквы x начинаютъ уменьшаться единицею, а показатели буквы a увеличиваться единицею со втораго члена, въ которомъ буква a появляется. Чтожъ касается до коеффиціентовъ m, $m.\frac{m-1}{2}$, и проч., то должно замѣтить, что коеффиціентъ втораго члена равенъ показателю перваго; коеффиціентъ третьяго, именно $m.\frac{m-1}{2}$ есть коеффиціентъ m предыдущаго члена, умноженной на $\frac{m-1}{2}$, то есть, на полвину показателя того же предыдущаго члена x. Равномѣрно коеффиціентъ четвертаго члена $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ происходитъ изъ коеффиціента $m.\frac{m-1}{2}$ предыдущаго члена, умноженнаго на $\frac{m-2}{3}$,

то есть, на треть показателя того же предыдущаго члена x, и такъ далѣе. Всѣ сіи заключенія, изъ одного разсмотрѣнія выведенныя, руководствуютъ къ слѣдующему общему правилу: *Коеффиціентъ всякаго члена находится умноженіемъ предыдущаго коеффиціента на показателя того же предыдущаго члена x, и раздѣленіемъ произведенія сего на число членовъ, предшествующихъ до искомаго.*

Составимъ для примѣра по этому правилу седьмую степень изъ $x + a$. Сія седьмая степень или $(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. Производя ее, должно поставить сначала x^7; по томъ уменьшивъ показателя его единицею, умножить на 7 и на a; отъ чего произойдетъ $7ax^6$, второй членъ.

Сей второй членъ умножить на $\frac{6}{2}$, уменшивъ показателя x единицею и увеличивъ ею показателя a; отъ чего произойдетъ $21a^2x^5$, третій членъ.

Третій членъ умножить на $\frac{5}{3}$, уменшивъ напередъ показателя x единицею, и увеличивъ ею показателя a; отъ чего произойдетъ $35a^3x^4$, четвертой членъ, и такъ далѣе. Дѣйствіе кончится безъ всякаго труда.

Естьли потребуется составить какую нибудь степень не изъ $x + a$, но изъ $x - a$; въ такомъ случаѣ члены выведенной степени будутъ имѣть попеременно знаки $+$ и $-$,

считая съ перваго; потому что въ a^4, знакъ не можетъ (24) перемѣниться, хотя бы на мѣсто $+ a$ поставлено было $- a$; но когда поставишь $- a$ въ нечотной степени, тогда знакъ перемѣнится.

Показанная формула можетъ служить не только къ составленію требуемой степени изъ простаго двучленнаго количества, какъ $x + a$, но и еще изъ двучленнаго сложнаго, на пр. $x^2 + a^2$, или $x^2 + a$, или $x^3 + a^3$ и проч. Также не только служитъ къ составленію степени, коей показатель будетъ цѣлое положительное число; но и такой, которой показатель будетъ данъ положительной или отрицательной, цѣлой или дробной. Однакожъ для легчайшаго производства сихъ послѣднихъ составленій дадимъ формулѣ другой видъ.

127. Возвратимся къ формулѣ $(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2x^{m-2} + \ldots m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3x^{m-3} +$ и проч.

Естьли по изъясненному (119) можно поставить $\frac{x^m}{x}$ въ мѣсто x^{m-1}; $\frac{x^m}{x^2}$ вмѣсто x^{m-2}; $\frac{x^m}{x^3}$ вмѣсто x^{m-3} и проч. то въ сходствен-

ность сего правила можно перемѣнить также предыдущую формулу въ слѣдующую другую: $(x + a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{a^2x^m}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3x^m}{x^3} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{a^4x^m}{x^4}$, и проч.

А какъ всѣ члены въ послѣднемъ случаѣ имѣютъ общимъ факторомъ x^m, то можно формулу перемѣнить еще въ другую такую, $(x + a)^m = x^m.(1 + \frac{ma}{x} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{a^3}{x^3} +$ и проч.), въ которой x^m служитъ множителемъ всему, что содержится въ скобкахъ. Изъ сего выведемъ слѣдующее правило для способнѣйшаго составленія порядка членовъ, долженствующихъ представить степень m двучастнаго $x + a$.

123. Поставь въ первой строкѣ слѣдующія количества:

$$m,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m-2}{3},\ \frac{m-3}{4},\ \frac{m-4}{5} \text{ и проч.}$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\frac{a^4}{x^4} \text{ и проч.}$$

И написавъ внизу нѣсколько въ лѣво единицу, составляй порядокъ членовъ такимъ образомъ.

Умножь сію единицу на первой членъ верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего произойдетъ второй членъ нижней строки или порядка.

Умножь сей второй членъ на второй верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего произойдетъ третій членъ послѣдней строки.

Умножь сей третій членъ на третій верхней строки и на $\frac{a}{x}$; отъ чего выдетъ четвертый членъ, и такъ далѣе.

Сложивъ всѣ сіи члены нижняго порядка, и умноживъ всю сумму на x^m, получишь величину $(x + a)^m$.

129. Естьли вмѣсто $x + a$ будетъ дано $x^2 + a^2$ или $x^3 + a^3$ или и проч., то не должно умножать послѣдовательно на $\frac{a}{x}$, но на $\frac{a^2}{x^2}$ въ первомъ случаѣ, на $\frac{a^3}{x^3}$ во второмъ, и вообще на второй членъ двучастнаго раздѣленный на первой; послѣ умножить сумму на x^2 возведенный въ степень m въ пер-

вомЪ случаѣ, на x^3 возведенный вЪ степень m во второмЪ, то есть, вообще на первой членЪ двучастнаго, возведенный вЪ искомую степень.

НапослѣдокЪ естьли второй членЪ будетЪ имѣть знакЪ — вмѣсто +; вЪ такомЪ случаѣ должно умножать послѣдовательно не на $\frac{a}{x}$ или $\frac{a^2}{x^2}$, но на $-\frac{a}{x}$ или $-\frac{a^2}{x^2}$ и проч.

Пусть для примѣра дано будетЪ составить шестую степень изЪ $x^3 + a^3$. Поступаю какЪ слѣдуетЪ.

$$6 \quad \tfrac{5}{2} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{2}{5} \quad \tfrac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}.$$

То есть, написавЪ вЪ строку 6, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$ и проч., что отвѣчаетЪ m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$ и проч.; потомЪ поставивЪ внизу единицу на мѣстѣ перваго члена второй строки, умножаю сей первой членЪ на первой членЪ 6 верхней строки и на $\frac{a^3}{x^3}$; отЪ чего выходитЪ $\frac{6a^3}{x^3}$ второй членЪ; умножаю $\frac{6a^3}{x^3}$ на второй членЪ $\frac{5}{2}$ верхней строки и на $\frac{a^3}{x^3}$; отЪ чего выходитЪ $\frac{15a^6}{x^6}$ третій членЪ, и такЪ далѣе.

НапослѣдокЪ умноживЪ сумму членовЪ, составленныхЪ по такому закону, на x^3 возведенный вЪ шестую степень, то есть, (96) на x^{18}, найду, что

$$(x^3 + a^3)^6 = x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9}$$

$+ \frac{15a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}$, или по приведенiи $x^{18} + 6a^{3}x^{15} + 15a^{6}x^{12} + 20a^{9}x^{9} + 15a^{12}x^{6} + 6a^{15}x^{3} + a^{18}$.

130. Естьли потребуется составить степень не изъ двучастнаго количества, но изъ трехчастнаго, на примѣръ составить третью степень изъ $a + b + c$; въ такомъ случаѣ здѣлавъ $b + c = m$, составь изъ $a + m$ третью степень, которая по предписаннымъ правиламъ выдетъ $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Потомъ поставивъ на мѣсто m величину его $b + c$, получишь $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$; но какъ означенныя степени изъ $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ относятся къ степенямъ двучастнаго количества, то составивъ ихъ, какъ было показано выше, и умноживъ послѣ соотвѣтственно на $3a^2$, $3a$ и 1, получишь по окончанiи выкладки, что $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

О извлеченiи Корней изъ разнородныхъ количествъ.

Узнавши находить члены всякой степени двучастнаго количества, не трудно вывести способъ извлекать корень требуемой степени изъ количества, которое въ буквахъ или въ числахъ будетъ дано; на пр. для извлеченiя квадратнаго корня припомнимъ еще, что квадратъ двучастнаго количества состоитъ изъ квадрата перваго члена, изъ двойнаго произведенiя того же перваго члена на второй, и изъ квадрата втораго члена. И такъ по расположенiи членовъ будемъ поступать, какъ ниже слѣдуетъ.

ПРИМѢРЪ. I.

$$\begin{array}{l|l} 36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ корень} \\ -\,36a^2 & 12a + 5b \\ \hline \quad + 60ab + 25b^2 & \\ \quad -\,60ab - 25b^2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Ищу корень перваго члена $36a^2$ и нахожу его $6a$, которой пишу по сторону даннаго количества.

Составляю квадратъ изъ сего корня, и пишу $36a^2$ подъ первымъ членомъ съ знакомъ — для вычитанія. По приведеніи остается $+ 60ab + 25b^2$.

Подъ корнемъ $6a$ ставлю его же удвоеннаго $12a$. Дѣлю на $12a$ остальную часть $60ab + 25b^2$, и въ частномъ нахожу $+ 5b$, которое пишу подлѣ корня $6a$, и получаю искомымъ корнемъ $6a + 5b$; но дабы увѣриться въ точности, ставлю частное $5b$ подлѣ $12a$, и умноживъ $12a + 5b$ на $5b$, подношу соотвѣтственныя части произведенія подъ количество $60ab + 25b^2$ съ противными знаками; послѣ чего дѣлаю приведеніе, въ остаткѣ не выходитъ ничего, и для того заключаю, что $6a + 5b$ есть настоящій квадратной корень изъ $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Возмемъ для втораго примѣра количество $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Расположивъ количество сіе по буквѣ a, получимъ квадратной его корень, какъ слѣдуетъ. . . .

ПРИМѢРЪ II.

$$\begin{array}{l|l} \qquad\quad 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 2a - 3b + 4c \text{ кор.} \\ -\,4a^2 & 4a - 3b \\ \hline \text{1 й ост.} - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 4a - 6b + 4c \\ \qquad + 12ab \qquad\qquad - 9b^2 & \\ \hline \text{2 й остатокъ} + 16ac - 24bc + 16c^2 & \\ \qquad\qquad - 16ac + 24bc - 16c^2 & \\ \hline \text{послѣдній остатокъ} \; . \; . \; . \; . \; 0 & \end{array}$$

Что изъяснимъ объ извлеченіи пятаго корня, подастъ намъ понятіе о томъ, какимъ образомъ должно поступать при извлеченіи корней прочихъ степеней.

По образцу степеней двучастнаго количества, пятая степень изъ $a + b$ должна быть $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Изъ всѣхъ 6 членовъ довольно первыхъ двухъ, чтобъ вывести желаемое правило.

Первый членъ представляетъ пятую степень перваго члена двучастнаго корня, а второй произведеніе четвертой степени того же перваго члена на второй членъ, взятое пять разъ; слѣд. для сысканія перваго члена въ корнѣ, надлежитъ по расположеніи всѣхъ членовъ данной степени, извлечь пятой корень изъ перваго члена; а чтобъ найти второй членъ корня, должно раздѣлить второй членъ извлекаемаго количества на упятеренную четвертую степень прежде найденнаго корня. Ибо можно видѣть, что пятой корень изъ a^5 есть a первой членъ двучастнаго, котораго пятую степень изображаетъ количество $a^5 + 5a^4b +$ и проч. Равномѣрно понять не трудно, что $\frac{5a^4b}{5a^4}$ въ частномъ даетъ b второй членъ двучастнаго корня. Когдажъ случится, что данное извлечь

количество не будетъ представлять совершенной пятой степени, тогда сыскавши показаннымъ способомъ второй членъ корня, надлежитъ повѣрить сей корень, составивши изъ него пятую степень, и изключивши оную изъ предложеннаго количества. Слѣдующій примѣръ объяснитъ лучше.

Требуется извлечь пятой корень изъ . . . .

$$\begin{array}{l|l} 32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & 2a+3b \text{ K.} \\ -\ 32a^5 & 80a^4 \\ \hline \text{Остат. } +240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & \end{array}$$

Ищу пятой корень изъ $32a^5$; онъ есть $2a$, которой и пишу по сторону даннаго количества.

Возвожу $2a$ въ пятую степень, и произведенїе $32a^5$ подношу съ противнымъ знакомъ подъ первой членъ $32a^5$ даннаго количества; отъ чего онъ и уничтожится.

Составляю изъ корня $2a$ четвертую степень: она выходитъ $16a^4$, а упятеренная $80a^4$, которую пишу подъ корнемъ $2a$; дѣлю на $80a^4$ первой членъ $240a^4b$ остатка, и въ частномъ получаю $3b$, которое приписываю къ корню; такимъ образомъ $2a+3b$ получаю за искомый корень; а чтобъ повѣрить его, то составляю изъ $2a+3b$ пятую степень, которая выходитъ съ такими же членами, какїя находятся въ данномъ количествѣ; дѣлаю вычитанїе, въ остаткѣ не выходитъ ничего; изъ сего заключаю, что пятой корень есть въ точности $2a+3b$.

Естьли бы надлежало быть еще члену въ корнѣ, то послѣ сего дѣйствїя вышелъ бы остатокъ: и для сысканїя сего новаго члена должно, принявъ $2a+3b$ за одно количество, дѣлать съ нимъ тоже, что сдѣлано было съ $2a$ для втораго члена въ корнѣ.

132. Что касается до количествъ, изображенныхъ въ числахъ, то правило для извлеченія ихъ корней служитъ тоже; одно только то остается объяснить, что отвѣчаетъ первому члену a^5, и что отвѣчаетъ члену $5a^4b$.

Для наблюденія порядка въ семъ изысканіи, надлежитъ вообразить, что a двучастнаго количества $a + b$ означаетъ десятки, а b единицы; послѣ чего не трудно увѣриться, что a^5 должно представлять сотни тысячь, ибо пятая степень 10^ти есть 100000; и такъ первой членъ a^5 или количество, изъ котораго слѣдуетъ извлекать пятой корень для полученія первой цыфры въ корнѣ, не можетъ содержаться въ пяти послѣднихъ цыфрахъ съ правой руки; для сей причины надлежитъ отдѣлить пять послѣднихъ цыфръ, и предположивъ, что остается ихъ въ лѣво пять же, или меньше, искать для сихъ послѣднихъ пятой корень, которой легко найдется, потому что онъ долженъ состоять изъ одной цыфры.

Сыскавши первую цыфру корня, и исключивши пятую ея степень изъ количества, посредствомъ котораго нашли сей корень, должно потомъ къ остатку снести пять отдѣленныя цыфры; теперь чтобъ найти

ту часть, которую слѣдуетъ дѣлить на $5a^4$, то есть, на упятеренную четвертую степень сысканныхъ десятковъ, надлежитъ отдѣлить четыре цыфры въ право и дѣлить остальныя въ лѣво, потому что часть $5a^4b$, которую должно дѣлить на $5a^4$, чтобъ сыскать b, не можетъ содержаться въ четырехъ послѣднихъ цыфрахъ; ибо $5a^4b$ выходитъ изъ произведенія $5a^4$ на b, и потому должно по крайней мѣрѣ состоять изъ десятковъ тысячь, поелику a^4 представляетъ десятки тысячь.

Здѣлавъ обьясненія сіи, заключимъ, что производство дѣйствія въ числахъ остается тоже, какое показано при литтеральномъ извлеченіи. Вотъ и примѣръ.

Требуется извлечь пятой корень изъ . . .

```
3802 . 04032 } 52 корень.
3125         }
   6770 . 4032
   3125
   380204032
      0.
```

Отдѣливъ пять послѣднихъ цыфръ 04032, ищу пятой корень числа 3802, которое заключая меньше пяти знаковъ, должно имѣть корень объ одной цыфрѣ. Сей корень есть 5, которой пишу по сторону.

Составляю изъ 5 пятую степень, и пишу произведеніе подъ 3802; сдѣлавъ вычитаніе, къ

остаткѣ получаю 677, къ которому сношу отдѣленныя пять цыфръ; отдѣляю снова у снесенныхъ четыре цыфры въ право, и дѣлю остальную часть 6770 на четвертую степень найденнаго корня 5, пять разъ взятую, то есть, на 5 разъ 625, или на 3125; въ частномъ нахожу 2, которое пишу подлѣ перваго корня 5. Для повѣрки корня 52, составляю изъ него пятую степень, и нахожу въ ней точно такое же число, какъ и данное; почему заключаю, что 52 есть совершенной корень изъ даннаго числа.

Когда случится остатокъ и понадобится подойти ближе къ настоящему корню, то прибавивъ къ остатку пять нулей, надлежитъ для полученія третьей цыфры въ корнѣ, которая будетъ представлять десятичную, продолжать дѣйствіе также, какъ и для второй.

Вообще для извлеченія корня всякой степени m, надлежитъ извлекаемое количество раздѣлить на грани, начиная отъ правой руки къ лѣвой, въ каждой по m цыфръ, изъ которыхъ послѣдняя грань въ лѣво можетъ имѣть ихъ меньше; потомъ извлечь корень степени m изъ сей послѣдней грани (корень сей долженъ состоять всегда изъ одной цыфры); къ остатку снести слѣдующую грань съ отдѣленіемъ у ней $m - 1$ цыфръ въ право, и раздѣлить остальную часть въ лѣво на m разъ составленную $m - 1$ степень изъ найденнаго корня, и такъ далѣе. Доказательствомъ на сіе служитъ то, что два первые члена двучастнаго $a + b$, возведеннаго въ какую нибудь степень m, суть $a^m + ma^{m-1}b$, и то, что a^m (положивъ,

что $\underline{a}$ представляетЪ десятки, а b единицы) не можетЪ имѣть части вЪ числѣ m послѣднихЪ цыфрЪ, и $ma^{m-1}b$ не можетЪ также заключаться вЪ числѣ $m - 1$ послѣднихЪ цыфрЪ.

СпособЪ извлекать Корни изЪ несовершенныхЪ степеней литтеральныхЪ количествЪ чрезЪ Приближеніе.

133. Естьли многочленное количество не представляетЪ совершенной степени извлекаемаго корня, то не можно надѣяться получить его вЪ точности; но надлежитЪ довольствоваться тѣмЪ, чтобЪ подойти кЪ нему столь близко, сколько потребуетЪ нужда. Можно достигнуть до сего по изЪясненному правилу для извлеченія корней изЪ совершенныхЪ степеней; ибо помощію его выводится безконечной порядокЪ дробныхЪ членовЪ, коихЪ величина умаляется безпрестанно, и для того можно ограничиться на извѣстномЪ числѣ членовЪ, а прочіе оставить; но такое дѣйствіе трудно и продолжительно. И такЪ постараемся дойти кЪ концу кратчайшею дорогою, употребивЪ данное (128) правило для возведенія двучастнаго количества вЪ требуемую степень. Для сего должно припомнить, что (109) всякой корень можетЪ представленЪ быть дробною степенью. ТакимЪ образомЪ

требовать квадратной корень изъ количества $a+b$, или найти величину $\sqrt{(a+b)}$, значитъ требовать возвести $a+b$ въ степень $\frac{1}{2}$, потому что (109) $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$.

Слѣд. по показанному (128) правилу, пишу образцовой порядокъ членовъ: $\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, .. $\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}-4}{5}$ и проч. а по приведенiи $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$ и проч.

И поставивъ 1 первымъ членомъ во второй строкѣ, вывожу слѣдующiй порядокъ . . . .

$$1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4} + \frac{15}{1280}\frac{b^5}{a^5} \text{ и проч.}$$

Умножая первой членъ 1 на первой членъ $\frac{1}{2}$ верхней строки и на $\frac{b}{a}$, то есть, на второй членъ двучастнаго $a+b$ раздѣленной на первой, получаю $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ второй членъ.

Составляю третiй членъ помноженiемъ найденнаго сего втораго на второй $-\frac{1}{4}$ верхней строки и на $\frac{b}{a}$; отъ чего выходитъ $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ третiй членъ.

Умножаю сей третiй на третiй членъ $-\frac{1}{2}$ верхней строки и на $\frac{b}{a}$; получаю $+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$ четвертымъ членомъ, и такъ далѣе.

Наконецъ умножаю всѣ найденные члены на первый членъ двучастнаго, возведенный въ степень $\frac{1}{2}$, и получаю за величину $(a-b)^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{(a+b)}$ слѣ-

дующее количество, $a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right.$ $\left.-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}\right.$ и проч.), которое можно продолжить столько, сколько угодно.

Мы увидимъ послѣ употребленіе сихъ приближеній, а теперь покажемъ только примѣромъ, какъ должно извлекать посредствомъ ихъ корни изъ количествъ, данныхъ въ числахъ. Положимъ, что требуется найти квадратной корень изъ 101; раздѣлю 101 на двѣ части, изъ которыхъ бы одна представляла самой большой совершенной квадратъ; на примѣръ раздѣлю его на двѣ слѣдующія части 100 и 1; положимъ, что $a = 100$, а $b = 1$; слѣдовательно $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; а $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0,01$; и такъ порядокъ членовъ, долженствующій изобразить $\sqrt{(a+b)}$, то есть, $\sqrt{101}$, принявъ за $a^{\frac{1}{2}}$ и $\frac{b}{a}$ ихъ величины, будетъ слѣдующій. . . .

$$10\left(1+\frac{0,01}{2}-\frac{(0,01)^2}{8}+\frac{(0,01)^3}{16}-\frac{5(0,01)^4}{128}+\right.$$
$$\left.\frac{35(0,01)^4}{1280}\text{ и проч.}\right)$$

Положимъ, что требуется сыскать корень въ десятитысячныхъ частяхъ; для сего довольно трехъ первыхъ членовъ, потому что четвертой $\frac{(0,01)^3}{16}$ равняется $\frac{0,000001}{16}$, то есть 0,0000000625; и хотя онъ долженъ быть умноженъ на 10, общаго множителя всѣхъ членовъ, однакожъ въ произведеніи выходитъ количество 0,000000625, гораздо ниже десятитысячныхъ частей. Изъ этаго должно заключить, что послѣдующіе члены еще должны быть ниже, потому что будучи умножены на 0,01, уменшаются; ибо умножая на дробь, беремъ нѣкоторую только часть множимаго.

И такъ величина $\sqrt{101}$ превращается въ . . . .

$10\left(1 + \frac{0{,}01}{2} - \frac{(0{,}01)^2}{8}\right)$, то есть, въ $10\,(1 + 0{,}005 - 0{,}0000125)$, или $10 \times 1{,}0049875$, или $10{,}049875$, наконецъ въ $10{,}0499$ въ однихъ только десятитысячныхъ.

Правило сїе можно примѣнить ко всѣмъ корнямъ и ко всѣмъ количествамъ; здѣлаемъ на него еще примѣръ, и пусть будетъ дано $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$. Слѣдовательно перемѣнивъ количество сїе на $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$, буду поступать какъ выше, и напишу:

$$\frac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5} - 1}{2},\ \frac{\frac{1}{5} - 2}{3},\ \frac{\frac{1}{5} - 3}{4},\ \frac{\frac{1}{5} - 4}{5} \text{ и проч.}$$

$$\text{или } \frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{19}{25} \text{ и проч.}$$

По томъ поставивъ первымъ членомъ второй строки 1, выведу слѣдующїе члены такъ . . . .

$$1 - \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{42}{1250}\frac{x^{20}}{a^{20}} - \frac{798}{31250}\frac{x^{25}}{a^{25}} \text{ и крoч.}$$

Изъ умноженїя перваго члена 1 на первой членъ $\frac{1}{5}$ верхней строки и на $-\frac{x^5}{a^5}$, то есть, на второй членъ двучастнаго, раздѣленный на первой, выходитъ $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ второй членъ нижняго порядка.

Для полученїя третьяго члена, умножу сей найденной второй членъ на второй членъ $-\frac{2}{5}$ верхней строки и на $-\frac{x^5}{a^5}$; сей третїй членъ будетъ $-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}$.

Наконецъ сыскавъ такимъ же образомъ послѣдующіе члены даже до шестаго, и умноживъ все на первой членъ a^5 двучастнаго количества, возведенной въ степень $\frac{1}{5}$, то есть (96) на $a^5 \times \frac{1}{5}$, или на a, получу за величину, которая близко подходитъ къ настоящей $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$, количество $a\,(1 - \frac{x^5}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}}$ и проч.)

134. Что касается до порядка выводимыхъ членовъ, то замѣтимъ, что за первой членъ даннаго количества должно принимать всегда самой большой; на примѣръ въ $\sqrt{(a + b)}$ принимали мы выше a первымъ членомъ; но естьли бы b случилось больше a, то должно бы принять b за первой членъ. Доказательствомъ сему служитъ то, что когда b больше a, то 1е порядокъ $(1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ и пр.) выходитъ ложный; ибо $\frac{b}{a}$ будетъ въ такомъ случаѣ больше 1 и послѣдующіе члены, которые умножаются безпрестанно на $\frac{b}{a}$ будутъ продолжаться увеличиваясь такъ, что не льзя будетъ узнать, на какомъ членѣ должно остановиться. И такъ въ семъ случаѣ должно составлять порядокъ членовъ, принимая b за первый. Этотъ порядокъ происходитъ такой $b^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}$ и проч.), въ которомъ члены идутъ уменшаясь.

Порядки, въ которыхъ члены идутъ увеличиваясь по мѣрѣ какъ они удаляются отъ начала своего, называются *отдаляющимися*; а тѣ, въ которыхъ члены уменшаются, удаляясь отъ своего начала, называются *сближающимися*.

135. Видѣли мы (118), что всякую Алгебраическую дробь можно представить въ видѣ цѣлаго, приписавъ знаменателя ея къ числителю съ отрицательнымъ показателемъ. Сiе наблюденiе подаетъ намъ способъ изображать строкою всякую дробь, которой знаменателемъ служитъ разнородное количество, и принесетъ впередъ великую пользу.

На примѣръ вмѣсто данной дроби $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$ могу написать $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$; потомъ возведу $a^2 - x^2$ въ степень -1 по данному (128) правилу, то есть, напишу напередъ строку:

$$-1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4}, \text{ и проч.}$$

или $-1, -1, -1, -1$.

И составлю слѣдующiй порядокъ членовъ:

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} \text{ и проч.}$$

Изъ умноженiя перваго члена 1 второй строки на первой членъ -1 верхней и на $-\frac{x^2}{a^2}$, выходитъ

$+ \frac{x^2}{a^2}$; изъ умноженія сего втораго на второй членъ -1 верхней строки и на $-\frac{x^2}{a^2}$, выходитъ $+\frac{x^4}{a^4}$, и такъ далѣе.

Умноживъ все на первой членъ a^2, возведенный въ степень -1, то есть (96) на $a^{2 \times -1}$, или на a^{-2}, получу $a^{-2} (1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$, и проч.) вмѣсто величины $(a^2 - x^2)^{-1}$; слѣдовательно для сысканія величины $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$, стоитъ только умножить найденную величину на a^2; но $a^{-2} \times a^2$ дѣлаетъ a^{2-2} или a^0, количество равное 1; слѣдовательно $a^2 (a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$, и проч.

Такимъ же образомъ приводи въ членовой порядокъ и всѣ прочія количества. Вмѣсто $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^3}$ прими $a^2 (a^2 + x^2)^{-3}$. Равномѣрно вмѣсто ..... $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2 + x^2)^3}}$ напиши напередъ $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{5}}}$, а потомъ $a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{5}}$, и такъ и проч.

Объ уравненіяхъ съ двумя неизвѣстными количествами, превосходящихъ первую степень.

136. Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ третьей, четвертой, пятой и проч. степени называется то, въ которомъ самая большая степень неизвѣстнаго будетъ какая нибудь изъ объявленныхъ; однакожъ урав-

неніе можетЪ сверхЪ сей степени заключать еще вЪ себѢ и другія нижнія.

На примѢрЪ $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, будутЪ всѢ сіи уравненія третьей степени.

Уравненіе сЪ двумя или большимЪ числомЪ неизвѢстныхЪ, превосходящее первую степень, называется не только тогда, когда одно изЪ неизвѢстныхЪ превышаетЪ первую степень; но и тогда, когда нѢкоторые изЪ неизвѢстныхЪ бываютЪ умножены между собою; вообще степень увеличивается по мѢрѢ, какЪ сумма показателей усугубляется вЪ какомЪ нибудь членѢ.

Уравненіе $x^3 + y^3 = a^2b$ есть третьей степени; уравненіе $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ почитается также третьей степени, потому что показатели количествЪ x и y вЪ членѢ x^2y составляютЪ 3, но вЪ прочихЪ членахЪ они меньше.

137. Для рѢшенія вопросовЪ, принадлежащихЪ кЪ уравненіямЪ сЪ многими неизвѢстными и превышающихЪ первую степень, должно, какЪ и вЪ уравненіяхЪ первой степени, приводить ихЪ вЪ одно такое, которое бы заключало вЪ себѢ одно неизвѢстное.

Естьли будутЪ даны двѢ эквацiи сЪ двумя неизвѢстными количествами, изЪ ко-

торыхъ въ одной какое нибудь изъ неизвѣстныхъ не превосходитъ первой степени; то для рѣшенія ихъ, *выведи въ уравненіи, гдѣ заключается неизвѣстное первой степени, величину его, почитая все прочее въ томъ уравненіи какъ бы извѣстнымъ, и вставь величину сію въ другомъ; отъ чего произойдетъ новое уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.*

На примѣръ въ слѣдующемъ вопросѣ: *сыскать два числа, коихъ бы сумма равнялась 12, а произведеніе 35?* положивъ искомыя числа x и y, получу $x + y = 12$ и $xy = 35$.

Изъ перваго уравненія выведу $x = 12 - y$, и вставивъ во второмъ въ мѣсто x сысканную величину его, получу $(12 - y)\,y = 35$, или $12y - y^2 = 35$ эквацію второй степени, которая будучи рѣшена по правиламъ (87 и слѣд.), дастъ $y = 6 \pm 1$, то есть, $y = 7$ или $y = 5$; а какъ $x = 12 - y$, то слѣд. x будетъ $= 5$, или $x = 7$, то есть, искомыя два числа будутъ 5 и 7, или 7 и 5.

Равномѣрно для рѣшенія уравненій $x + 3y = 6$ и $x^2 + y^2 = 12$; изъ перваго выведу $x = 6 - 3y$, и вставивъ во второмъ величину сію, получу $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; по совершеніи показаннаго дѣйствія, найду $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$, или по перенесеніи всего въ одну сторону $10y^2 - 36y + 24 = 0$, уравненіе второй степени, которое разрѣшится по правиламъ (87 и слѣд.).

Для третьяго примѣра возмемъ двѣ эквацїи $xy + y^2 = 5$ и $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. Изъ первой выходитъ $x = \frac{5 - y^2}{y}$; по вставкѣ величины сей во второмъ уравненіи найдется $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{6 - y^2}{y}\right)^2 y$

$= y^2 + 7$; сїе послѣднее, по совершенїи въ немъ показанныхъ дѣйствїй и по приведенїи, превратится въ $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, въ уравненїе съ однимъ неизвѣстнымъ y, и будетъ пятой степени.

138. *Естьли между данными уравненіями найдется нѣкоторое меньшой степени, и въ которомъ одно изъ двухъ неизвѣстныхъ количествъ не будетъ превышать второй степени; то взявши въ уравненіи меньшой степени величину квадрата не столь возвышеннаго неизвѣстнаго, поставь ее въ другомъ въ мѣсто квадрата тогоже неизвѣстнаго и его степеней; продолжай вставливать величину сію до тѣхъ поръ, пока неизвѣстное сдѣлается первой степени. Тогда извлекши въ послѣднемъ семъ уравненіи величину тогоже неизвѣстнаго, поставь ее въ данномъ меньшей степени.*

На примѣръ въ данныхъ двухъ эквацїяхъ $x^2 + 3y^2 = 6x$ и $2x^3 - 3y^2 = 8$; изъ первой возьму величину x^2, которая есть $x^2 = 6x - 3y^2$, и вставивъ ее во второй, получу, (замѣтивъ, что x^3 происходитъ изъ $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, и по приведенїи $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; а какъ и въ этомъ уравненїи находится x^2, то вставливаю въ немъ еще величину x^2, и нахожу $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, эквацїю, въ которой x состоитъ въ первой степени.

Извлекаю величину x и получаю $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; вставливаю величину сїю въ первой эквацїи $x^2 +$

$3y^2 = 6x$, отъ чего выходитъ $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)$, или $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$, или $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)^2$, эквацїя, въ которой стоитъ только сдѣлать умноженїе и обыкновенныя приведенїя.

Объ уравненїяхъ съ двумя членами.

139. *Уравненія съ двумя членами* суть тѣ, въ которыхъ неизвѣстное находится въ одинакой степени, и называются такъ потому, что могутъ приведены быть всегда въ два члена.

На примѣръ уравненїе $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ есть съ двумя членами; ибо по представленїи его въ такомъ видѣ $(a + b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, не трудно примѣтить, что a и b изображаютъ извѣстныя количества, и слѣд. можно всегда $a + b$ и $a^4b^2 - a^3b^3$ представить въ одномъ количествѣ; такъ что эквацїя сїя можетъ перемѣниться въ слѣдующую другую $px^5 = q$.

Уравненія такого рода весьма легко рѣшатся; потому что, какъ можно видѣть изъ самаго примѣра, стоитъ только отдалить отъ степени неизвѣстнаго множителей, или дѣлителей, и потомъ извлечь корень, означенный показателемъ тогоже неизвѣстнаго.

На примѣръ эквацїя $px^5 = q$ превращается въ $x^5 = \frac{q}{p}$, а сїя по извлеченїи пятаго корня въ $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

140. Когда показателя степени представляетъ не парное число, тогда въ корнѣ выходитъ одна только дѣйствительная или настоящая величина; на примѣръ въ данной эквацiи $x^5 = 1024$, выходитъ $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; ибо видѣть можно, что нѣтъ другаго числа, кромѣ настоящаго 4, которое, возведено будучи въ пятую степень, составило бы 1024.

Когда вторая часть уравненiя находится съ знакомъ —, въ такомъ случаѣ величина количества x получаетъ знакъ —; потому что — умноженный на — нечотное число разъ, дѣлаетъ также —; естьли же показатель представляется парнымъ числомъ, то неизвѣстное имѣетъ двѣ величины, одну положительную, а другую отрицательную, изъ которыхъ обѣ могутъ быть настоящими или умственными. Умственныя величины выходятъ, когда вторая часть уравненiя бываетъ съ знакомъ —.

Въ данной эквацiи $x^4 = 625$ можно заключить, что $x = \sqrt[4]{625} = 5$; но какъ — умноженный на — чотное число разъ, дѣлаетъ тоже въ произведенiи, что и + умноженный на +, то величина x можетъ также представлена быть чрезъ -5; слѣд. надлежитъ писать всегда $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$, какъ и въ уравненiяхъ второй степени. Когда же дано будетъ $x^4 = -625$, то должно заключить, что $x = \pm \sqrt[4]{(-625)}$; обѣ сiи величины будутъ умствен-

ныя, потому что нѣтъ числа, ни положительнаго, ни отрицательнаго, которое бы, умножено будучи само на себя чотное число разъ, могло произвести отрицательное количество.

Здѣлаемъ задачу на уравненія такого роду. Положимъ, что требуется *найти два среднія пропорціональныя числа между* 5 *и* 625. Представивъ искомыя чрезъ x и y, получимъ $\div 5 : x : y : 625$ пропорцію, въ которой заключаются слѣдующія двѣ другія:

$$5 : x = x : y$$
$$x : y = y : 625.$$

Изъ сихъ двухъ пропорцій, по умноженіи въ нихъ крайнихъ и среднихъ членовъ, вывожу два уравненія $5y = x^2$ и $625x = y^2$. По первому получаю $y = \frac{x^2}{5}$; вставивъ величину $\frac{x^2}{5}$ въ мѣсто y во второмъ, нахожу $625x = \frac{x^4}{25}$; по раздѣленіи на x и умноженіи на 25, произойдетъ $x^3 = 15625$, и наконецъ $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; слѣд. $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

О уравненіяхъ, которыя рѣшатся на подобіе уравненій второй степени.

141. Уравненія сіи должны заключать въ себѣ двѣ только разныя степени количества x, изъ которыхъ бы одна была притомъ вдвое больше другой; на пр. $x^4 + 5x^2 = 8$, и $x^6 + 5x^3 = 8$ суть уравненія такого свойства, и рѣшатся по тѣмъ же правиламъ, какъ второй степени; то есть, надлежитъ, по учиненіи въ нихъ вышней степени поло-

жительною, естьли она не такова, и по уничтоженіи въ ней всѣхъ количествъ умножающихъ или дѣлящихъ ее, взять половину изъ коеффиціента меньшой степени неизвѣстнаго, и прибавить къ обѣимъ частямъ эквацiи по квадрату сей половины; отъ чего первая часть произойдетъ совершенной квадратъ. Тогда извлекши квадратной корень изъ обѣихъ частей, напиши корень второй съ двойныхъ знаковъ $\pm$; послѣ чего уравненіе сдѣлается о двухъ членахъ.

На примѣръ требуется *найти два числа, коихъ бы сумма кубовъ составляла* 35, *а произведеніе* 6: По силѣ вопроса выходятъ двѣ эквацiи $x^3 + y^3 = 35$ и $xy = 6$. Въ послѣдней извлекаю величину $y = \frac{6}{x}$, которую вставивъ въ первой получаю $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; по уничтоженіи знаменателя и по перестановкѣ членовъ $x^6 - 35x^3 = -216$. Беру половину изъ 35; она есть $\frac{35}{2}$; прибавляю квадратъ половины сей къ обѣимъ частямъ уравненія, и получаю $x^6 - 35x^3 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216$; извлекаю квадратной корень, и нахожу $x^3 - \frac{35}{2} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$; по перестановкѣ $x = \frac{35}{2} \pm\sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$ наконецъ по извлеченіи кубическаго корня $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35}{2} \pm\sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}\right)}$; но $\left(\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4}$, а $\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216 = \frac{1225 - 864}{4} =$

$\frac{361}{4}$; слѣд. $\sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]} = \sqrt{\left(\frac{361}{4}\right)} = \frac{19}{2}$.

Почему $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}\right)}$ представляетъ такое уравненїе, въ которомъ x заключаетъ двѣ слѣдующїя величины $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35+19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, и $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35-19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; а какъ найдено, что $y = \frac{6}{x}$, то y будетъ $= 2$ и $y = 3$.

Когда показатель вышней степени будетъ 4, или умноженное на 4, въ такомъ случаѣ можетъ выйти въ корнѣ до четырехъ настоящихъ величинъ.

О Производствѣ или Составленїи уравненїй.

142. Видѣли мы, что въ уравненїяхъ съ двумя членами, величина неизвѣстнаго выходитъ всегда одна настоящая, когда они бываютъ нечотной степени, въ чотной же двѣ; сверхъ сего выходятъ еще многїя другїя величины умственныя, которыя не меньше тѣхъ полезны, и съ которыми познакомимся какъ при рѣшенїи самихъ эквацїй, такъ и въ другомъ мѣстѣ. *Вообще во всякомъ уравненїи выходитъ столько величинъ для неизвѣстнаго, сколько находится единицъ въ самомъ большомъ его показателѣ.* Изъ сихъ величинъ, которыя также называются *корнями* уравненїя, однѣ могутъ быть положительными, другїя отрицатель-

ными; иныя настоящими, а иныя умственными.

143. Дабы увѣриться въ сей истиннѣ, должно примѣтить, что, по перенесенiи всѣхъ членовъ экващи въ одну сторону, и по расположенiи надлежащимъ порядкомъ всѣхъ степеней x или неизвѣстнаго, можно почитать всѣ члены, состоящiя въ одной части уравненiя, за результатъ, вышедшiй изъ умноженiя многихъ двучленныхъ простыхъ факторовъ, изъ которыхъ всѣ имѣютъ общимъ членомъ x.

На примѣръ естьли уравненiе $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$ будетъ представлено въ такомъ видѣ $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$; то можно допустить, что количество $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ вышло изъ умноженiя трехъ простыхъ двучастныхъ факторовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$.

Ибо по умноженiи сихъ трехъ факторовъ, получимъ - - - -

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\ - bx^2 &+ acx \\ - cx^2 &+ bcx. \end{aligned}$$

А чтобъ увѣриться, что оба уравненiя сiи одинаковы, то стоитъ только найти для

a, b, c такія величины, изЪ которыхЪ бы $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$, и $abc = 9$.

Для сысканія же каждой изЪ сихЪ величинЪ, на примѢрЪ a, надлежитЪ, по умноженіи перваго уравненія на a^2, а втораго на a, отЪ чего выдетЪ $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, и $abc = 9$, вычесть второе изЪ перваго, и кЪ остатку прибавить третье; послѢ чего выдетЪ $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, или по переноскѢ $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

ТакимЪ же образомЪ для величины b найдется эквація $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, и для c будетЪ такого же рода $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. ИзЪ сихЪ заключеній можно вывести слѢдующія предложенія.

144. 1[e]. Поелику уравненіе, вЪ которомЪ величина a должна выттти, есть одинаково сЪ тѢмЪ, какое служитЪ для величины b и такое же, какое представляетЪ величину c; а какЪ безЪ сумнѢнія величины a, b, c не могутЪ быть равны между собою; то надлежитЪ, чтобЪ всякое изЪ трехЪ уравненій заключало вЪ себѢ величины a, b и c; почему каждое сіе уравненіе должно имѢть три корня, изЪ которыхЪ одинЪ бу-

детъ изображать величину a, другой b, а третій c.

2^e. Каждое изъ трехъ составныхъ уравненій совершенно равняется данному $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, съ тѣмъ только различіемъ, что здѣсь a, или b, или c перемѣнены въ x. Почему данное уравненіе должно имѣть три корня, служащіе величинами a, b и c.

Слѣд. количества, которыя должно поставить вмѣсто a, b, c въ $x - a$, $x - b$, $x - c$, для производства уравненія $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$ чрезъ умноженіе сихъ простыхъ факторовъ, суть сами корни того же уравненія.

145. Естьли бы вмѣсто коеффиціентовъ 8, 7 и проч. разныхъ степеней x, были другія числа, и когда бы въ мѣсто уравненія третьей степени было бы дано четвертой, пятой и проч.; то выведенныя нами заключенія не меньше будутъ справедливы. На примѣръ естьли вообще будетъ дана эквація $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, то предположивъ, что p, q, r, s представляютъ извѣстныя числа, можно почитать сіе уравненіе за такое, которое произошло изъ умноженія четырехъ простыхъ факто-

ровъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$; ибо произведеніе четырехъ сихъ факторовъ въ самомъ дѣлѣ выходитъ слѣдующ е - - - -

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^3 + adx^2 - acdx & \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

Но для равенства сего уравненія съ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, надлежитъ количествамъ a, b, c, d быть такого свойства, чтобъ $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, и $abcd = s$.

По умноженіи первой изъ сихъ эквацій на a^3, второй на a^2, третьей на a, и по исключеніи второй и четвертой изъ первой и третьей, сложенныхъ вмѣстѣ, выходитъ $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, или $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$; равномѣрно найдется, что уравненіе, представляющее b, будетъ $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; уравненіе для c будетъ $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$, и уравненіе для d будетъ такое же $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. Почему уравненіе, коимъ опредѣляется величина a, должно так-

же опредѣлить b, c и d; слѣд. оно должно имѣть четыре корня, служащіе величинами для четырехъ количествъ a, b, c, d. А какъ притомъ каждое уравненіе есть одинаково съ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, то количества a, b, c, d, принятыя для составленія сего послѣдняго посредствомъ умноженія четырехъ простыхъ факторовъ $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, должны представлять самые корни сего уравненія.

146. *И такъ* 1^е. *вообще можно почитать всякое уравненіе представляющимъ произведеніе столькихъ двучастныхъ простыхъ факторовъ, имѣющихъ общимъ членомъ букву неизвѣстнаго, сколько находится единицъ въ самомъ большомъ показателѣ неизвѣстнаго.*

2^е. *Вторые члены сихъ двучастныхъ служатъ корнями уравненію, каждой будучи взятъ съ противнымъ знакомъ.*

147. Естьли члены въ уравненіи, на мѣсто знаковъ поперемѣнно положительныхъ и отрицательныхъ, какъ предположено было въ предыдущемъ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, примутъ совсѣмъ другой видъ, на примѣръ такой $x^4 + px^3 - qx^2 - rx$

$+ s = 0$; то и тогда эквація сія можетЪ также представлена быть чрезЪ $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$, и что a, b, c, d будутЪ также корнями сей последней.

148. Поелику a, b, c, d и проч. служатЪ корнями, то следуетЪ изЪ уравненій $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$; 1[e] что вЪ эквацiи $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; и вообще во всякой другой *коеффиціентъ —р втораго члена, взятой съ противнымъ знакомъ, то есть + р, равняется суммѣ всѣхъ корней.*

2[e]. *Коеффиціентъ q третьяго члена равенъ суммѣ произведеній сихъ корней, умноженныхъ по два.*

3[e]. *Коеффиціентъ четвертаго, взятой съ противнымъ знакомъ, равенъ суммѣ корней, умноженныхъ по три*, и такЪ далѣе. *Наконецъ послѣдній членъ состоитъ изъ произведенія всѣхъ корней.*

Сія истинна принадлежитЪ вообще до всѣхЪ членовЪ, не смотря на различіе знаковЪ уравненія; только надлежитЪ брать

коеффиціентЪ члена парнаго числа всегда сЪ противнымЪ знакомЪ.

ИзЪ сего слѣдуетЪ, что *вЪ эквации, неимѣющей втораго члена, находятся какЪ положительные такЪ и отрицательные корни, и что сумма однихЪ равна суммѣ другихЪ.*

ТакимЪ образомЪ вЪ эквацїи $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, сумма трехЪ корней состоитЪ изЪ -2; сумма произведенїй ихЪ, умноженныхЪ по два, изЪ -23; сумма произведенїй ихЪ, умноженныхЪ по три, или произведенїе трехЪ корней состоитЪ изЪ $+60$. ВЪ самомЪ дѣлѣ три корня сей эквацїи суть $+5$, -4, -3; ибо естьли принято будетЪ за величину x каждое изЪ сихЪ число, то первая часть уравненїя превратится вЪ нуль; но явствуетЪ также, что сумма сихЪ трехЪ чиселЪ, то есть, $+5-4-3$ равняется -2, сумма ихЪ произведенїй по два, или $-20-15+12$ равна -23, и произведенїе ихЪ по три состоитЪ изЪ $5 \times -4 \times -3$, то есть, изЪ $+60$.

Равномѣрно изЪ эквацїи $x^3 - 19x + 30 = 0$, вЪ которой втораго члена не находится, заключаю, что она имѣетЪ какЪ положительные, такЪ и отрицательные корни, и что сумма первыхЪ равна суммѣ вторыхЪ; ибо три оные корни суть дѣйствительно $+2$, $+3$, -5.

149. Разсматривая уравненіе, составнымЪ изЪ произведенія многихЪ двучленныхЪ простыхЪ факторовЪ, легко увѣриться можно, какимЪ образомЪ разныя многія числа рѣшатЪ его. На примѣрЪ слѣдующій вопросЪ можетЪ доказать намЪ справедливость того:

Найти такое число, изъ котораго есть-ли вычтешь 5, и потомъ къ нему же самому прибавишь попеременно числа 4 и 3, то две суммы умноженныя между собою и на остатокъ должны равняться нулю? Положимъ число сіе x; слѣд. $x - 5$ будетъ представлять остатокъ, а $x + 4$ и $x + 3$ двѣ суммы; слѣд. по силѣ вопроса надлежитъ, чтобъ $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = 0$, то есть, $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$; но безъ сумнѣнія произведеніе сіе, или равное ему $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$ можетъ во всѣхъ трехъ случаяхъ обратиться въ нуль, именно когда положишь $x = -4$, $x = -3$, и $x = 5$. Ибо въ первомъ случаѣ оно изобразится чрезъ $0 \times (-4 + 3) \times (-4 - 5)$; во второмъ чрезъ $(-3 + 4) \times (0) \times (-3 - 5)$; въ третьемъ чрезъ $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (0)$. По чему въ уравненіи $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$ не можно именно утвердить, какое лучше взять число -4, или -3, или $+5$, потому что каждое изъ нихъ обращаетъ первую часть его въ нуль, и слѣд. рѣшитъ его.

150. Сдѣлаемъ еще здѣсь замѣчаніе, которое будетъ намъ полезно. Каждое изъ уравненій $a + b + c + d = p$, $ab + ac +$

$ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$ выводитЪ одинакую эквацію какЪ для опредѣленія величины a, такЪ b, такЪ и проч. Причиною сему служитЪ то, что всѣ количества a, b, c, d располагаются вЪ каждой экваціи одинакимЪ образомЪ, и потому не для чего опредѣлять одно количество противнымЪ дѣйствіемЪ тому, которымЪ опредѣляется другое. Вообще естьли при изысканіи многихЪ неизвѣстныхЪ количествЪ принуждены бываемЪ для каждаго употреблять одинакія разсужденія, одинакія дѣйствія и одинакія извѣстныя количества; то всѣ сіи количества должны быть необходимо корнями того же уравненія, и слѣд. рѣшеніе задачи такого рода приводитЪ кЪ составному уравненію.

151. Поелику можно принимать уравненіе составленнымЪ изЪ произведенія многихЪ простыхЪ факторовЪ; то слѣд. можно его принимать также за вышедшее изЪ произведенія многихЪ сложныхЪ факторовЪ.

На примѣрЪ эквацію третьей степени можно почитать составленною изЪ произведенія фактора второй степени, какЪ $x^2 + ax + b$ на фактора первой степени, на примѣрЪ $x + c$; ибо $x^2 + ax + b$ можетЪ безЪ сумнѣнія представлять произведеніе двухЪ другихЪ простыхЪ факторовЪ.

Равномѣрно можно почитать эквацію четвертой степени за такую, которая выходитЪ или изЪ про-

изведенія четырехъ простыхъ факторовъ, или двухъ факторовъ второй степени, или одного фактора третьей степени, а другаго первой.

152 А какъ уравненіе второй степени можетъ имѣть мнимые корни, то и уравненія вышней степени могутъ ихъ имѣть также.

О Перемѣнахъ или Превращеніяхъ, которымъ могутъ подлежать уравненія.

153. Эквацiи могутъ перемѣняться различно, и для того прежде рѣшенія ихъ поговоримъ о сихъ превращеніяхъ.

154. *Естьли въ эквацiи перемѣнятся знаки членовъ, представляющихъ нечотныя степени, то положительные корни сего уравненія превратятся въ отрицательные, а отрицательные въ положительные.*

Ибо для перемѣны знаковъ корней въ уравненiи, стоитъ только поставить — x въ мѣсто + x; но такая вставка не можетъ перемѣнить знаковъ въ членахъ, заключающихъ парныя степени количества x, а только перемѣняетъ ихъ въ тѣхъ, которые содержатъ нечотныя степени.

155. *Для превращенія эквацiи съ знаменателями въ такую, въ которой бы ни знаменателей, ни коеффиціента у перваго члена не находилось,* надлежитъ

поставить вмѣсто неизвѣстнаго другое неизвѣстное, раздѣленное на произведенiе всѣхъ знаменателей, и умножить потомъ новое уравненiе на знаменателя перваго члена.

На примѣръ естьли будетъ дано такое уравненiе $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$; то сдѣлаю $x = \frac{y}{mnp}$, и поставивъ величину x въ данной эквацiи, получу $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; умножу на $m^3n^3p^3$; отъ чего выдетъ $y^3 + \frac{am^3n^3p^3y^2}{m^3n^2p^2} + \frac{m^3n^3p^3c}{mn^2p}\, y + \ldots \frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$, а по совершенiи показанныхъ дѣйствiй $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

156. Когда m, n и p будутъ равны между собою, то довольно въ такомъ случаѣ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$. Отсюда слѣдуетъ, что для превращенiя эквацiи, въ которой всѣ коэффицiенты будутъ цѣлыя числа, и притомъ первой членъ ея будетъ также съ коэффицiентомъ, въ другую, которой бы первой членъ не имѣлъ коэффицiента, а прочiе члены были бы съ коэффицiентами, состоящими изъ цѣлыхъ чиселъ, надлежитъ сдѣлать $x = \frac{y}{m}$; m въ такомъ случаѣ означаетъ коэффицiентъ перваго члена; ибо раздѣливъ данное уравненiе $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$ на m, получу другое $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, въ которомъ всѣ знаменатели равны.

157. *Для уничтоженiя вторагo члена эквацiи*, должно поставить вмѣсто неизвѣстнаго другое неизвѣстное, усугублен-

ное коеффиціентомЪ втораго члена, взятымЪ сЪ противнымЪ знакомЪ, и раздѣленнымЪ на показателя перваго члена.

Ибо естьли представивЪ вообще эквацію чрезЪ $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + k = 0$, положимЪ $x = y + s$, то произойдетЪ два уравненія и три неизвѣстныхЪ, изЪ которыхЪ каждое опредѣляется произвольно.

КогдажЪ вЪ каждомЪ членѣ вЪ мѣсто степени x поставится подобная степень изЪ $y + s$, то (126) произойдетЪ порядокЪ членовЪ слѣдующій:

$$y^m + msy^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot s^2y^{m-2} \text{ и проч.} \ldots + k = 0$$
$$+ ay^{m-1} + (m-1) \cdot asy^{m-2} \text{ и проч.}$$
$$+ by^{m-2} \text{ и проч.}$$

И такЪ принявЪ y за неизвѣстное, примѣчаемЪ, что новая эквація можетЪ сдѣлаться безЪ втораго члена тогда только, когда s будетЪ такого свойства, что $ms + a = 0$, то есть, когда возмется $s = \frac{-a}{m}$ такой величины, какая выходитЪ изЪ сего уравненія. Но видѣли мы, что за какую нибудь изЪ трехЪ неизвѣстныхЪ и слѣд. за s можно принимать произвольную величину; а какЪ $\frac{-a}{m}$ представляетЪ такую величину, какая нужна вмѣсто s для эквацiи вЪ y безЪ втораго члена, то для превращенія даннаго уравненія $x^m + ax^{m-1} +$ и проч. вЪ другое безЪ втораго члена, должно сдѣлать $x = y - \frac{a}{m}$.

На примѣрЪ желая уничтожить второй членЪ вЪ эквацiи $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$, здѣлаю $x =$

$y - \frac{6}{3}$, то есть, $x = y - 2$. По вставкѣ сей величины въ данномъ уравненіи получаю . . . .

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & -6y^2 & +12y & -8 = 0 \\ & +6y^2 & -24y & +24 \\ & & -3y & +6 \\ & & & +4 \end{array}$$

А по приведеніи выходитъ $y^3 - 15y + 26 = 0$ эквація безъ втораго члена y^2.

О рѣшеніи Сложныхъ уравненій.

158. Мы будемъ предполагать въ последующихъ изъясненіяхъ всѣ члены эквации перенесенными въ одну сторону.

Рѣшить вообще эквацію всякой степени, на пр. $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots k = 0$, значитъ сыскать для неизвѣстнаго столько величинъ, сколько находится единицъ въ самомъ большомъ его показателѣ, и изъ которыхъ каждая изображена буквами p, q и проч. k, соединенными между собою всякимъ образомъ; такого напослѣдокъ свойства, чтобъ каждая величина, поставленная въ мѣсто x въ эквации, превратила первую ея часть въ нуль, независимо отъ всякой особенной величины p, q и проч.

Мы намѣрены употребить нижеслѣдующій способъ для одного только рѣшенія

третьей степени, хотя онымъ можно рѣшить вообще уравненія всѣхъ степеней, и слѣд. четвертой; однако для сей четвертой изъяснимъ другой легчайшій и на тѣхъ же правилахъ основанной. Въ каждомъ способѣ принимается рѣшимая эквація за результатъ двухъ другихъ съ двумя неизвѣстными. Сіи двѣ новыя эквацiи должны быть такого свойства, чтобъ, по совершеніи надъ ними нѣкоторыхъ дѣйствій, можно было приводить ихъ въ одну съ однимъ неизвѣстнымъ такую, которая бы въ точности сходствовала съ данною. И такъ все дѣло состоитъ въ выборѣ ихъ; посмотримъ же, какія именно должны онѣ быть.

Хотя сей способъ не требуетъ уничтоженія втораго члена въ разрѣшаемомъ уравненіи, однако для удобности выкладокъ будемъ предполагать его вездѣ уничтоженнымъ по данному (157) правилу.

Такимъ образомъ $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} +$ и проч $+ k = 0$ будетъ представлять вообще всякое рѣшимое уравненіе.

Возьми двѣ эквацiи $y^m - 1 = 0$, и $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} +$ и проч. - - $+ x = 0$; гдѣ a, b, c, и проч.

суть количества неизвѣстныя, которыя опредѣлимъ такъ, какъ будетъ показано ниже.

Посредствомъ сихъ двухъ послѣднихъ уничтожай y до тѣхъ поръ, пока произойдетъ эквація въ x степени m и безъ втораго члена.

Коеффиціенты разныхъ степеней x будутъ состоять изъ a, b, c и ихъ степеней.

Сравни каждаго новаго коеффиціента съ коеффиціентомъ соотвѣтственной степени x въ данной экваціи $x^m + px^{m-2} +$ и проч. отъ чего произойдетъ столько эквацій для опредѣленія a, b, c и проч., сколько находится этихъ количествъ. По опредѣленіи a, b, c и проч. получишь всѣ корни или величины x помощію вставки величинъ a, b, c и проч. въ экваціи $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} +$ и проч. $+ x = 0$, полагая попеременно вмѣсто y каждой изъ корней уравненія $y^m - 1 = 0$, которыя, какъ увидимъ ниже, опредѣлить не трудно.

Приноровка для третьей Степени.

159. Пусть будетъ дано рѣшить слѣдующее уравненіе $x^3 + px + q = 0$.

Беру $y^3 - 1 = 0$, и $ay^2 + by + x = 0$.

Для уничтоженія y, умножаю послѣднюю эквацію на y, и поставивъ вмѣсто y^3 величину его 1, выведенную изъ $y^3 - 1 = 0$, получу $by^2 + xy + a = 0$. Умножу опять сію новую на y, и вставивъ въ мѣсто y^3 величину его 1, найду $xy^2 + ay + b = 0$.

И такъ произойдутъ три слѣдующія уравненія:

$$ay^2 + by + x = 0$$
$$by^2 + xy + a = 0$$
$$xy^2 + ay + b = 0.$$

Посредствомъ двухъ первыхъ найду величины y^2 и y по правиламъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными; величины сіи будутъ .....
$y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}$, и $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

Вставивъ сіи величины въ третьемъ уравненіи $xy^2 + ay + b = 0$, получу $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0$, или по уничтоженіи знаменателя и по приведеніи . . .

$$x^3 - 3abx + \begin{matrix} a^3 \\ + b^3 \end{matrix} = 0.$$

Сравнивъ эту эквацію съ $x^3 + px + q = 0$, нахожу, что для равенства ихъ надобно, чтобъ $-3ab = p$, и $a^3 + b^3 = q$. По симъ двумъ уравненіямъ приступаю къ опредѣленію a и b.

Изъ перваго вывожу $b = -\frac{p}{3a}$; по вставкѣ сей величины во второмъ уравненіи нахожу $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, или по умноженіи его на a^3 и по перестановкѣ членовъ $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, такое, которое разрѣшаясь по уравненію второй степени (141), обратится въ

$a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2$, потомъ въ $a^3 - \frac{1}{2}q = \pm V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$; по переноскѣ членовъ въ $a^3 = \frac{1}{2}q \pm V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$, и напослѣдокъ въ $a =$ (*) $\sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)]$.

Для полученїя b, вставливаю въ экваціи $a^3 + b^3 = q$ сысканную величину a^3, отъ чего происходитъ $\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3) + b^3 = q$; по перестановкѣ членовъ $b^3 = \frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)$, и слѣд. $b = \sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)]$.

Но изъ экваціи $ay^2 + by + x = 0$, выходитъ $x = - ay^2 - by$; и слѣд. $x = - y^2 \sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)] - y \sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)]$ будетъ такое уравненїе, которое содержитъ въ себѣ три корня.

Теперь стоитъ только узнать величины y. Изъ экваціи $y^3 - 1 = 0$ выходитъ $y^3 = 1$, и слѣд. по извлеченїи кубическаго корня $y = 1$. Для сыканїя же двухъ другихъ корней, раздѣлю (151) $y^3 - 1$ на $y - 1$, и получу $y^2 + y + 1$; приравняю количество сїе къ нулю, отъ чего выдетъ эквацїя, содержащая въ себѣ два прочїе корня. По разрѣшенїи $y^2 + y + 1 = 0$, найду $y = \frac{-1 + V(-3)}{2}$; и слѣд. три величины y будутъ слѣдующїя $y = 1$, $y = \ldots \frac{-1 + V(-3)}{2}$, и $y = \frac{-1 - V(-3)}{2}$. Вставивъ попеременно величины сїи въ $x = - y^2 \sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q + V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)] - y\sqrt[3]{}[\frac{1}{2}q - V(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)]$, и замѣтивъ, что два количества $\left(\frac{-1 + V(-3)}{2}\right)^2$ и $\left(\frac{-1 - V(-3)}{2}\right)^2$

(*) Здѣсь при второмъ радикалѣ поставляется одинъ только знакъ, потому что въ семъ случаѣ довольно одной величины a.

превращаются, первое въ $\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}$, а второе въ ... $\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}$, получу три величины x слѣдующія:

$$x = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$-\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$x = \frac{1+\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+\frac{1-\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$
$$x = \frac{1-\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+\frac{1+\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

160. Разсматривая три сысканныя величины x, можно примѣтить, что пока p будетъ положительнымъ, количество $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ останется всегда положительнымъ; потому что $\frac{1}{4}q^2$, квадратъ изъ $\frac{1}{2}q$, долженъ быть и тогда положительнымъ, когда бы q было отрицательнымъ. Сіе самое количество остается еще положительнымъ, когда $\frac{1}{4}q^2$ будетъ больше $\frac{1}{27}p^3$ съ отрицательнымъ знакомъ. Въ обоихъ случаяхъ двѣ послѣднія величины x должны быть мнимыя; ибо два кубическіе радикала будутъ количества дѣйствительные и неравные, и слѣд. въ произведеніяхъ своихъ на количества $\sqrt{(-3)}$ и $-\sqrt{(-3)}$ съ противными знаками не уничтожатся взаимно; почему останется нѣчто мнимымъ въ обѣихъ послѣднихъ величинахъ x; и слѣд. одна только первая величина x есть дѣйствительная.

161. Но когда p будетъ отрицательное, и притомъ $\frac{1}{27}p^3$ случится больше $\frac{1}{4}q^2$, тогда $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ будетъ количество отрицательное, а количество $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ мнимое; со всѣмъ тѣмъ три величины x остаются въ такомъ случаѣ всѣ дѣйствительными

Хотя нѣтъ ни малаго сомнѣнія, что эти три корня будутъ дѣйствительными; однако никто не могъ еще представить ихъ въ настоящемъ видѣ другимъ способомъ, кромѣ приближенія. Сей случай, гдѣ употребляется способъ приближенія, и о которомъ вскорѣ будемъ говорить, называется *неприводимымъ случаемъ.*

Сдѣлаемъ примѣръ на первой случай.

Положимъ, что требуется сыскать корни въ эквацiи $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; начинаю дѣйствiе уничтоженiемъ втораго члена, дѣлая $y = x - 2$, отъ чего она превращается въ $x^3 - 15x + 26 = 0$. Но мы представили всякую эквацiю третьей степени безъ втораго члена чрезъ $x^3 + px + q = 0$; почему p должно быть $= -15$, $q = 26$, и $\frac{1}{2}q = 13$; $\frac{1}{4}q^2 = 169$, $\frac{1}{3}p = -5$ и $\frac{1}{27}p^3 = -125$; слѣд. $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{44}$; и такъ три величины x произойдутъ слѣдующiя:

$$x = -\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} - \sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 + \sqrt{(44)}]} + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{[13 - \sqrt{(44)}]}.$$

То есть первая отрицательная, а послѣднiя двѣ мнимыя.

Приноровка для четвертой Степени.

162. Дабы употребить предыдущiй случай при рѣшенiи уравненiя четвертой степени, беру два дру-

сія $y^4 - 1 = 0$, и $y^3 + ay^2 + by + x = 0$. Умножаю послѣднее три раза сряду на y, вставливая при каждомъ умноженіи въ мѣсто y^4 величину его 1, отъ чего происходятъ четыре экваціи въ y и въ x; вывожу изъ трехъ первыхъ величины y^3, y^2 и y, и вставивъ ихъ въ четвертой, получаю эквацію четвертой степени въ x, которую потомъ сравниваю, какъ показано выше, съ общею эквацією четвертой степени.

163. Но рѣшеніе сдѣлается еще легче, когда возьму два слѣдующія уравненія $y^2 - 1 = 0$, и $y(ax + b) + x^2 + c = 0$. Умноживъ послѣднее на y, и поставивъ въ мѣсто y^2 величину его 1, получу два другія:

$$y(ax + b) + x^2 + c = 0$$
$$y(x^2 + c) + ax + b = 0$$

По вставкѣ во второмъ уравненіи величины y, взятой изъ перваго, и по приведеніи всего, выдетъ . . .

$$\begin{matrix} x^4 + 2cx^2 - 2abx + cc = 0 \\ - aax^2 \qquad\qquad - bb \end{matrix}$$

Когда сія эквація сравнится съ общею четвертой степени $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, то найдемъ, что $2c - aa = p$, $-2ab = q$, $cc - bb = r$. Первое изъ трехъ сихъ уравненій даетъ $c = \frac{p + aa}{2}$, а второе $b = \frac{-q}{2a}$; по вставкѣ сихъ величинъ въ третьемъ, выходитъ . . .

$$a^6 + 2pa^4 + (pp - 4r)a^2 - qq = 0.$$

Эквація, которая хотя и шестой степени, однакожъ рѣшится на подобіе экваціи третьей степени, потому что содержитъ однѣ только степени a^2.

И такЪ сыскавши a^2 по правилу (159), опредѣляю потомЪ a, b и c по уравненіямЪ $b = \frac{-q}{2a}$, и $c = \frac{p + aa}{2}$. НапослѣдокЪ по извѣстнымЪ y, a, b и c разрѣшу эквацію $y(ax + b) + x^2 + c = 0$, и получу двѣ величины x; а какЪ эквація $y^2 - 1 = 0$, или $y^2 = 1$ содержитЪ двѣ величины y, то есть, $y = 1$ и $y = -1$, то поставивЪ обѣ сіи величины вмѣсто y, получу четыре корня x.

О соизмѣримыхЪ ДѣлителяхЪ уравненій.

164. Естьли между корнями эквацін должны находиться соизмѣримые дѣлители, то можно опредѣлить ихЪ легче по слѣдующимЪ наблюденіямЪ и способу, нежели по общему рѣшенію той эквацін.

165. Поелику послѣдній членЪ всякой эквацін состоитЪ изЪ произведенія всѣхЪ корней (148), то никакое число не можетЪ прежде быть соизмѣримою величиною x, пока не будетЪ точнымЪ дѣлителемЪ послѣдняго члена. Слѣд. надлежитЪ брать поперемѣнно всѣхЪ дѣлителей послѣдняго члена, и вставливать ихЪ вЪ эквацін вЪ мѣсто x, то сЪ $+$, то сЪ $-$, (ибо x можетЪ имѣть положительныя и отрицательныя величины): тотЪ дѣлитель, которой поставленЪ будучи вЪ уравненіи, превратитЪ его вЪ нуль, почитается величиною x.

Но какъ такое дѣйствіе бываетъ часто продолжительнымъ, то мы намѣрены замѣтить, какъ различать дѣлителей годныхъ отъ тѣхъ, которыхъ не должно допускать; предложимъ напередъ, какимъ образомъ находятся всѣ дѣлители даннаго числа.

166. Чтобъ найти всѣхъ дѣлителей какого нибудь числа, должно прежде дѣлить его на первыя числа, начиная съ простѣйшихъ, и продолжать дѣлить на одно число, пока можно. Послѣ чего написавъ въ особой строкѣ всѣ сіи первыя числа и каждое столько разъ, сколько оно могло раздѣлить, умножь потомъ ихъ между собою по два, по три, по четыре и проч. Произведенія сіи, первыя числа и единица покажутъ всѣхъ искомыхъ дѣлителей.

На примѣръ желая сыскать всѣхъ дѣлителей 60, дѣлю 60 на 2; въ частномъ выходитъ 30; дѣлю 30 на 2, въ частномъ получаю 15; дѣлю 15 на 3, нахожу 5; напослѣдокъ дѣлю 5 на 5, и получаю 1. Такимъ образомъ первыми дѣлителями будутъ 2, 2, 3, 5; умножаю ихъ попарно, и нахожу 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Умножаю ихъ между собою по три, и нахожу 12, 20, 30, 30; наконецъ умножаю по четыре и получаю 60.

Такимъ образомъ всѣ дѣлители даннаго числа, за исключеніемъ тѣхъ, которые нѣсколько разъ повторяются, будутъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

167. Положимъ теперь, что требуется сыскать соизмѣримыхъ дѣлителей въ такой эквацiи, которая ихъ имѣетъ, на примѣръ въ эквацiи четвертой степени, изображенной вообще чрезъ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Представимъ сего дѣлителя чрезъ $x + a$; въ такомъ случаѣ можно принять (151) данное уравненiе за такое, которое произошло изъ умноженiя $x + a$ на фактора третьей степени, на примѣръ $x^3 + kx^2 + mx + n$; слѣд. по умноженiи обоихъ сихъ факторовъ произойдетъ - - -

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an &= 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx &, \end{aligned}$$

Изъ сей эквацiи, которая должна представлять тоже, что $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, происходятъ слѣдующiя другiя $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$; или $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, $1 = \frac{p - k}{a}$.

Допустимъ теперь, что a представляетъ одного изъ дѣлителей послѣдняго члена; а чтобъ увѣриться, что можно принять его, то по замѣчанiю предыдущихъ уравненiй $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$ и проч. должно дѣлить

послѣдній членъ даннаго уравненія на сего дѣлителя, частное вычесть изъ коеффиціента x, и остатокъ раздѣлить опять на того же дѣлителя; вычесть сіе второе частное изъ коеффиціента x^2, и остатокъ раздѣлить на того же дѣлителя; продолжать такое дѣйствіе до коеффиціента втораго члена эквацiи, по раздѣленіи котораго въ частномъ должна выпти 1. Естьли взятой дѣлитель дѣлитъ вездѣ на равно, то безъ сумнѣнія можно принять его за a; когдажъ хотя одно дѣленіе не выходитъ въ точности, то взятое число не годится.

Какъ единица дѣлитъ всякое число, то должно пробовать и ею какъ съ +, такъ и —; притомъ должно замѣтить, что лучше поставлять ее вдругъ въ данномъ уравненіи въ мѣсто x съ + или —; такую вставку весьма легко дѣлать, потому что каждая степень изъ + 1 есть + 1, всякая чотная степень изъ — 1 есть + 1, но не чотная — 1. Когда изъ обѣихъ вставокъ ни одна не годится, то есть, ни одна не превращаетъ первой части эквацiи въ нуль, тогда за a не можно принять ни + 1, ни — 1.

Предположивъ сіе, приступимъ къ изслѣдованію всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена, кромѣ единицы.

Пусть требуется узнать, имѣетъ ли эквація $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$ соизмѣримаго дѣлителя? Ищу всѣхъ дѣлителей послѣдняго члена 15 кромѣ единицы, и нашедши ихъ пишу по порядку (поставляя какъ съ +, такъ и —), что видѣть можно изъ первой строки чиселъ . . .

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Дѣлители числа 15ти . . .	+ 15,	+ 5,	+ 3,	— 3,	— 5,	— 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	— 5,	— 3,	— 1
	— 21,	— 23,	— 25,	— 15,	— 17,	— 19
				+ 5		
				+ 18		
				— 6		
				— 3		
				+ 1		

Дѣлю послѣдній членъ + 15 на каждое число первой строки, и частныя ставлю во второй.

Вычитаю каждой членъ второй строки изъ коеффиціента x, то есть, изъ — 20, и остатки пишу въ третьей строкѣ.

Дѣлю каждой членъ сей строки на соотвѣтствующій ему въ первой строкѣ, и нашедши частное въ точности, пишу его. Здѣсь кромѣ одного, именно + 5, нѣтъ другаго; почему заключаю, что въ этомъ уравненіи не находится больше одного соизмѣримаго дѣлителя. Но одно ли выходитъ частное въ точности или много, продолжаю такимъ образомъ:

Вычитаю каждое частное изъ коеффиціента 23 члена x^2, и пишу остатки въ пятой строкѣ; здѣсь нахожу + 18.

Дѣлю, какъ выше, каждой остатокъ на соотвѣтствующїй членъ первой строки, и пишу каждое частное въ низу; здѣсь пишу — 6.

Вычитаю каждое новое частное изъ коеффицїента — 9 члена x^3, и пишу остатки въ низу; здѣсь пишу — 3.

Наконецъ дѣлю остатки сїи на соотвѣтствующїе члены первой строки; здѣсь нахожу въ частномъ + 1; И такъ заключаю, что членъ — 3 первой строки соотвѣтствуетъ члену a, и слѣд. $x - 3$ представляетъ дѣлителя $x + a$; то есть, $x - 3$ дѣлитъ эквацїю; слѣд. $x = 3$, и 3 будетъ соизмѣримою величиною количества x въ данномъ уравненїи.

О способѣ подходить къ настоящимъ корнямъ Сложныхъ уравненій чрезъ Приближенїе.

168. Подходя въ уравненїяхъ къ величинѣ неизвѣстнаго чрезъ способъ приближенїя, которой теперъ намѣрены изъяснить, предполагаемъ, что мы нашли уже величину сего корня близу одной десятой. Однакожъ посмотримъ, какъ сїя первая величина находится. Возмемъ для примѣру уравненїе $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Въ семъ уравненїи на мѣсто x ставлю многїя числа то съ положительными, то съ отрицательными знаками до тѣхъ поръ, пока двѣ мало между собою разнящїяся вставки выведутъ два результата съ противными знаками. Нашедши два числа такого свойства, заключаю, что величина x содержится между ими; такъ что ежели оба числа разнятся

между собою на одну только десятую часть, то искомая близкая величина x будетъ или одно какое нибудь изъ тѣхъ чиселъ, или половина суммы ихъ.

Но естьли они разнятся больше, чѣмъ на одну десятую, то поступаю, какъ слѣдуетъ.

Ставлю въ эквацїи $x^3 - 5x + 6 = 0$ числа 0, 1, 2, 3, 4 и проч.; но вскорѣ примѣчаю, что всѣ они выводятъ положительные результаты, чего для начинаю ставить другїя числа 0, — 1, — 2, — 3, и проч., послѣ которыхъ выходятъ слѣдующїе результаты.

Вставки	*Заключенія* (результаты).
0	+ 6
— 1	+ 10
— 2	+ 8
— 3	— 6.

Останавливаюсь на двухъ послѣднихъ и заключаю, что корень долженъ содержаться между — 2 и — 3. А какъ числа сїи разнятся между собою единицею, которая гораздо больше десятой части каждаго, то беру половину изъ нихъ, то есть, беру — 2,5 половину ихъ суммы — 5. Ставлю снова въ уравненїи 2,5 въ мѣсто x, и въ заключенїи нахожу + 2,875 количество положительное, по которому разсуждаю, что корень содержится между — 2,5 и — 3.

Беру половину изъ — 2,5 и — 3; то есть — 2,7 опуская цыфры, послѣдующїя за десятыми.

Ставлю въ уравненїи — 2, 7 въ мѣсто x, и нахожу результатомъ — 0,183 количество отрицательное. Но поелику — 2, 5 произвели положительной результатъ, а — 2, 7 отрицательной, то величина x заключается между — 2, 5 и — 2, 7; но оба сїи числа разнятся между собою на 0, 2, меньше нежели на одну десятую часть каждаго; слѣд. величиною x будетъ служить (половина сихъ двухъ чиселъ) — 2, 6 близу одной десятой.

Сыскавши такимЪ образомЪ число, которое разнится меньше, чѣмЪ на одну десятую отЪ количества x, полагаю потомЪ x равнымЪ сему числу сЪ новымЪ неизвѣстнымЪ количествомЪ z; то есть, полагаю здѣсь $x = -2,6 + z$, и вставливаю величину сїю вЪ эквацїи на мѣсто x; но какЪ z представляетЪ не болѣе десятой части количества 2, 6, слѣд. квадратЪ его не болѣе будетЪ сотой части квадрата того, а кубЪ не болѣе одной тысячной, и такЪ далѣе; почему опускаю вЪ этой вставкѣ всѣ степени z, превосходящїя первую; и дабы не дѣлать безполезныхЪ выкладокЪ, то при составленїи куба изЪ $2,6 + z$ (и другихЪ степеней, естьли онѣ случатся) допускаю только два первые члена, которые выходятЪ по правилу (126).

Дабы при вставкѣ находился порядокЪ, то пишу, какЪ явствуетЪ здѣсь . . .

$$x^3 = (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6).\ z$$
$$-5x = -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z$$
$$+6 = +6.$$

СоединивЪ надлежащимЪ образомЪ члены сей вставки, получу вЪ результатѣ $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2.\ z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, или по совершенїи означенныхЪ дѣйствїй и по приведенїи $15,28z + 1,424 = 0$; отсюда вывожу $z = -\frac{1,424}{15,28}$, а по приведенїи сей дроби вЪ десятичныя $z = -0,09$ такому количеству, которое выходитЪ изЪ дѣленїя не далѣе производимаго, какЪ до первой значащей цыфры. Вообще не должно продолжать дѣленїя далѣе стольких значащихЪ цыфрЪ, сколько находится мѣстЪ между сею и первою цыфрою прежней величины x; здѣсь между 9 (то есть первою значащею цыфрою частнаго 0,09) и 2 (первою цыфрою числа 2, 6) прежде найденной приближенной величины x находится одно мѣсто; почему и останавливаюсь на первой значащей цыфрѣ 9.

И такЪ величина x, именно $x = -2,6 + z$ превращается вЪ $x = -2,6 - 0,09$, то есть, вЪ $x = -2,69$.

Желая же получить велину x точнѣе, полагаю $x = -2,69 + t$.

Слѣд. получаю $x^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 . t$
$-5x = -5(-2,69) - 5t$
$+6 = +6$

По совершенїи дѣйствїй и по приведенїи буду имѣть $-0,015109 + 16,7083t = 0$; отсюда вывожу $t = \frac{0,015109}{16,7083}$, а въ десятичныхъ $t = 0,000904$.

Почему величина x, то есть, $x = -2,69 + t$ превратится снова въ $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Естьли нужно подойти къ настоящей величинѣ еще ближе, то должно сдѣлать $x = -2,689096 + u$, и поступать, какъ выше.





ВТОРОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,

Въ которомъ показывается Примѣненіе Алгебры къ Ариѳметикѣ и Геометріи.

---

169. По представленіи всеобщимъ образомъ каждаго извѣстнаго и неизвѣстнаго количествъ, заключающихся въ вопросѣ и по изображеніи всѣхъ его условій уравненіями, можно оставить вопросъ и заниматься однѣми уравненіями и примѣненіемъ приличныхъ имъ правилъ. Тогда для всякаго, кто обнялъ и въ твердой памяти содержитъ все, что сказано было о знакахъ и о расположеніи буквъ, каждое уравненіе становится книгою, въ которой онъ читаетъ понятно различныя отношенія совокупленныхъ количествъ. Онъ можетъ разною приноровкою правилъ, изъясненныхъ въ предыдущемъ отдѣленіи, давать уравненіямъ новыя виды, подъ которыми отношенія становятся еще понятнѣе. Словомъ, онъ можетъ почитать

ихъ залогомъ всѣхъ свойствъ трактуемыхъ количествъ и общихъ рѣшеній множества другихъ вопросовъ, коихъ прежде не было въ виду, и которыя наконецъ появляясь сближаются съ начальнымъ.

Поелику правила, по которымъ сыскиваются величины неизвѣстныхъ, требуютъ всѣ вообще, чтобъ каждое неизвѣстное количество занимало въ уравненіи особую часть, а всѣ прочія находились бы въ другой; и какъ притомъ правила сіи служатъ неизключительно для всякаго количества, содержащатося въ уравненіи, то можно, слѣдуя онымъ, ставить въ первой его части каждое, а во второй прочія, и рѣшить какъ бы такой вопросъ, въ которомъ всѣ послѣднія количества становятся извѣстными, а неизвѣстнымъ одно первое. Изъ сего слѣдуетъ, что одно уравненіе рѣшитъ столько разныхъ вопросовъ, сколько въ немъ заключается разныхъ количествъ. Сдѣлаемъ истинну сего чувствительнѣе и понятнѣе примѣрами.

Общія свойства Ариѳметическихъ Прогрессій.

170. Мы видѣли (Ариѳ. 190), что всякой членъ возрастающей Ариѳметической

прогрессіи состоитъ изъ перваго, сложеннаго съ разностію, взятою столько разъ, сколько находится членовъ до искомаго.

И такъ естьли представимъ чрезъ a числовую величину перваго члена, чрезъ u величину искомаго, чрезъ d разность, и наконецъ чрезъ n число всѣхъ членовъ; въ такомъ случаѣ $n - 1$ изобразитъ число членовъ предшествующихъ до u, и данное предложеніе переведено будетъ на Алгебраической языкъ слѣдующимъ уравненіемъ $u = a + (n - 1) d$. Сіе уравненіе разрѣшаетъ такой вопросъ, которымъ требуется по извѣстнымъ въ прогрессіи Ариѳметической разности d, числу членовъ n и величинѣ a, опредѣлить величину послѣдняго члена u.

Но какъ сіе уравненіе заключаетъ въ себѣ четыре количества, то утверждаю, что оно разрѣшаетъ четыре общія вопроса; именно. . .

1[e]. Естьли принявъ a за неизвѣстное, буду искать величину его, то получу по правиламъ перваго отдѣленія $a = u - (n - 1) d$. Сія эквація показываетъ, что для опредѣленія перваго члена возрастающей Ариѳметической прогрессіи надлежитъ изъ послѣдняго члена u вычесть разность d,

взятую $n - 1$ разЪ, то есть, разность, взятую столько разЪ, сколько находится всѣхЪ членовЪ безЪ единицы.

2^e. Естьли буду искать n, какЪ неизвѣстное, то изЪ эквацiи $u = a + (n - 1) d$, которая есть одинакова сЪ $u = a + nd - d$, выведу по перестановкѣ вЪ ней членовЪ $nd = u - a + d$, а по раздѣленiи $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$; сiя послѣдняя показываетЪ, что для опредѣленiя числа членовЪ, (положивЪ, что первой членЪ a, послѣднiй u и разность d Ариѳметической прогрессiи извѣстны), должно первой членЪ вычесть изЪ послѣдняго, остатокЪ раздѣлить на разность d и кЪ частному прибавить единицу. На примѣрЪ естьли первой членЪ будетЪ данЪ 5, послѣднiй 37, а разность 2; то вычту 5 изЪ 37, и остатокЪ 32 раздѣлю на разность 2, вЪ частномЪ произойдетЪ 16; кЪ 16 приложу 1, и получу 17 за число членовЪ прогрессiи.

3^e. НаконецЪ вЪ эквацiи $u = a + (n - 1) d$ принявши d за неизвѣстное, опредѣлю его такимЪ образомЪ. ВопервыхЪ по перестановкѣ членовЪ выведу эквацiю $(n - 1) d = u - a$, а по раздѣленiи на $n - 1$

слѣдующую другую, $d = \frac{u - a}{n - 1}$; сія послѣдняя научаетъ, что для опредѣленія разности, находящейся въ прогрессіи, коей первой членъ, послѣдній и число членовъ извѣстны, должно вычесть первой изъ послѣдняго и раздѣлить остатокъ на число членовъ безъ единицы. Сіе правило есть тоже самое, какое мы предписали (Ариѳ. 193) для сысканія извѣстнаго числа среднихъ пропорціональныхъ членовъ между двумя данными количествами.

И такъ одна сія экваціа $u = a + (n - 1) d$ заключаетъ въ себѣ рѣшеніе четырехъ особенныхъ вопросовъ; и слѣд. по тремъ извѣстнымъ какимъ нибудь членамъ изъ четырехъ, кои суть первой членъ, послѣдній, число членовъ и разность прогрессіи Ариѳметической, можно опредѣлить всегда четвертый.

171. Всякое другое свойство, выраженное общимъ образомъ, можетъ рѣшить столько различныхъ вопросовъ, сколько находится членовъ въ разсматриваемомъ свойствѣ.

На примѣръ между свойствами Ариѳметическихъ прогрессій находится еще и такое, въ которомъ *для опредѣленія суммы всѣхъ*

членовъ Ариѳметической прогрессіи должно сложить первый ея членъ съ послѣднимъ, и сумму умножить на половину числа членовъ.

Почему для опредѣленія суммы ста первыхъ членовъ въ прогрессіи ÷ 1. 3. 5. 7 и проч., которой сотымъ служитъ 199; сложу послѣдній членъ 199 съ первымъ 1, и сумму 200 умножу на 50, то есть, на половину 100 числа членовъ, и получу 10000 за сумму ста первыхъ нечотныхъ чиселъ.

Мы докажемъ тотчасъ свойство сіе; а дабы не упустить изъ виду своего предмета, то удержавъ прежнія названія количествъ, представимъ притомъ чрезъ s сумму всѣхъ членовъ; слѣд. объявленное свойство изобразится Алгебраически такимъ образомъ: $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Сіе уравненіе приводитъ насъ въ состояніе рѣшить слѣдующій общій вопросъ, заключающій въ себѣ четыре другіе. *По тремъ даннымъ какимъ нибудь членамъ изъ четырехъ, кои суть первой, послѣдній, число членовъ и сумма всѣхъ членовъ прогрессіи Ариѳметической, найти четвертой.*

Ибо 1^e. по извѣстнымъ a, u и n можно непосредственно опредѣлить въ предыдущемъ уравненіи величину s.

2^e. Естьли по извѣстнымъ a, u и s должно опредѣлить n, то уничтоживъ въ эквацін $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ дѣлителя 2, получишь $2s = (a + u) \times n$, или $(a + u) \times n = 2s$; потомъ раздѣливъ на $a + u$ получишь $n = \frac{2s}{a + u}$ уравненіе, въ которомъ n становится извѣстнымъ, потому что количества a, u и s, составляющія величину его, предполагаются данными.

3^e и 4^e. Естьли наконецъ по извѣстнымъ a, s и n, или u, s и n надобно узнать величины u или a, то взявъ опять тожъ уравненіе $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, уничтожъ въ немъ дробь, чрезъ что получишь $2s = (a + u) n$; сіе послѣднее, раздѣленное на n, представитъ $a + u = \frac{2s}{n}$, изъ котораго не трудно вывести $u = \frac{2s}{n} - a$, и $a = \frac{2s}{n} - u$ искомыя двѣ величины.

Приступимъ теперь къ доказательству предположеннаго свойства.

Нѣтъ нималаго сумнѣнія, что мы не переставая представлять чрезъ *a* первой членъ, а чрезъ *d* разность, можемъ изобразить всякую Ариѳметическую возрастающую прогрессію въ такомъ видѣ $\div a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.\ a+6d$ и проч. Вообразимъ теперь, что подъ сею Ариѳметическою прогрессіею поставлена таже самая прогрессія, только въ противномъ видѣ, именно такъ:

$$\div a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ a+4d.\ a+5d.\ a+6d$$
$$\div a+6d.\ a+5d.\ a+4d.\ a+3d.\ a+2d.\ a+d.\ a$$

Поелику обѣ сіи прогрессіи равны между собою, то явствуетъ, что сумма членовъ каждой состоитъ изъ полсуммы обѣихъ; но обратившъ внимание на сіи прогрессіи, примѣтимъ, что каждыя два сходственныя ихъ члена дѣлаютъ вездѣ и должны дѣлать одинакую сумму, и что притомъ сія сумма есть тажъ, какая находится между первымъ и послѣднимъ членомъ первой прогрессіи; изъ сего должно заключить, что для опредѣленія цѣлости или суммы всѣхъ членовъ обѣихъ этихъ прогрессій надлежитъ сложить первой членъ какой нибудь одной съ послѣднимъ, и сумму умножить на число членовъ; слѣд. для опредѣленія суммы всѣхъ членовъ одной какой нибудь прогрессіи должно

вѣ сходственность сего умножить сумму перваго члена сѣ послѣднимѣ на половину числа членовѣ.

172. И такѣ рѣшенные нами восемь общихѣ вопросовѣ основываются единственно на двухѣ правилахѣ или свойствахѣ, показанныхѣ (170 и 171); а какѣ притомѣ рѣшенiе ихѣ выводится непосредственно изѣ двухѣ уравненiй, кои представляютѣ собою ни что другое, какѣ Алгебраической переводѣ объявленныхѣ двухѣ свойствѣ, то явствуетѣ, какѣ помощiю Алгебры можно извлекать изѣ одного источника всѣ заключающiяся вѣ немѣ истинны.

Хотя не всѣ изѣ этихѣ свойствѣ одинаково полезны, однакожѣ будучи весьма легки и просты, дѣлаютѣ понятнѣе употребленiе уравненiй; и для того принявѣ ихѣ опять вѣ разсужденiе, будемѣ объяснять употребленiе сiе.

Вѣ предыдущихѣ разсужденiяхѣ разсматривали мы вѣ особенности одно только уравненiе; но естьли случатся между двумя или большимѣ числомѣ уравненiй, изображающихѣ различныя свойства какихѣ нибудь количествѣ, такiя, которыя заключаютѣ вѣ себѣ нѣкоторыя изѣ тѣхѣ коли-

чествѣ общими, то можно въ такомъ случаѣ вывести еще множество другихъ свойствъ. На примѣръ двѣ главныя экваціи для Ариѳметическихъ прогрессій, именно $u = a + (n - 1)d$ и $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$ заключаютъ въ себѣ три общія количества a, u и n. Ибо извлекши изъ каждаго уравненія величину какого нибудь изъ сихъ трехъ количествъ, и сравнивъ потомъ обѣ величины ихъ между собою, получимъ новую эквацію, въ которой одного общаго количества не будетъ находиться больше, и которая изобразитъ отношеніе четырехъ прочихъ независимо отъ изключеннаго. На примѣръ выводя въ каждомъ уравненіи величину a, найду, что $a = u - (n - 1)d$, и $a = \frac{2s}{n} - u$; потомъ сравнивъ ихъ между собою, получу $u - (n - 1)d = \frac{2s}{n} - u$ такую эквацію, въ которой принимая поперемѣнно u, n, d и s за неизвѣстныя, найду, какъ выше, новыя общія свойства прогрессій Ариѳметическихъ. На примѣръ принявъ s за неизвѣстное, получу $s = \frac{2nu - n.(n - 1)d}{2}$ такое уравненіе, которое представитъ сумму Ариѳметической прогрессіи посредствомъ послѣдняго члена, разности и числа членовъ; потому что вторая часть сего уравненія со-

стоитъ только изъ сихъ трехъ извѣстныхъ количествъ.

Естьли вмѣсто a уничтожено будетъ u или n, то при каждомъ уничтоженіи произойдетъ новое уравненіе, содержащее въ себѣ четыре только количества изъ пяти a, u, n, d, s; и слѣд. принимая попеременно каждое изъ сихъ четырехъ количествъ за неизвѣстное, можно изъ всякаго новаго уравненія вывести по четыре новыя формулы, которыя послужатъ различными изображеніями количествъ a, u, n, d, s; каждое изображеніе сіе имѣетъ особенную пользу, глядя по вопросу, какія будутъ даны количества въ Ариѳметической прогрессіи. На примѣръ для опредѣленія суммы всѣхъ членовъ Ариѳметической прогрессіи, въ которой извѣстны первой членъ, разность и число членовъ, надлежитъ уничтожить u, потому что послѣдній членъ прогрессіи не данъ; отъ чего произойдетъ эквація, заключающая въ себѣ четыре только сіи количества a, n, d и s, по которымъ s удобно опредѣлится.

Заключимъ изъ сего, что два уравненія $u = a + (n - 1)d$ и $s = (a + u)\frac{n}{2}$ рѣшатъ всѣ вопросы, относящіеся къ Ариѳметическимъ прогрессіямъ, и въ коихъ непо-

средственно извѣстны три изъ пяти количествъ a, u, n, d, s.

173. Для показанія употребленія сихъ правилъ, положимъ, что требуется узнать число ядеръ, находящееся въ основаніи треугольной кучи.

Не трудно понять, что число ядеръ, содержащееся въ каждомъ параллельномъ ряду съ какимъ нибудь бокомъ основанія кучи, уменшается постепенно единицею, и число рядовъ равно числу ядеръ, помѣщающемуся на какой нибудь сторонѣ тогожъ основанія. И такъ представивъ число сіе чрезъ n, получишь искомое число ядеръ въ суммѣ Ариѳметической возрастающей прогрессіи такой, коей первый членъ будетъ единица, послѣдній n, и число членовъ также n; сумма сія изобразится чрезъ $(n + 1) \times \frac{n}{2}$. На примѣръ естьли сторона даннаго основанія заключаетъ въ себѣ 6 ядеръ, то вся сумма ядеръ состоитъ изъ 21.

Помощію сего же правила, относящагося къ производству членовъ Ариѳметической прогрессіи, можно сыскать площадь всякой трапеціи или треугольника. Ибо вообразивъ высоту трапеціи раздѣленною параллельными линѣями съ основаніемъ на безчисленное множество равныхъ частей, не трудно понять, что сама она раздѣлена будетъ на безчисленное множество маленькихъ другихъ трапецій, которыя будутъ простираться къ одной сторонѣ, постепенно увеличиваясь. Слѣд. чтобъ опредѣлить число всѣхъ сихъ трапецій (171), стоитъ сложить между собою двѣ крайнія, и сумму ихъ умножить на половину всего числа ихъ; но какъ трапеціи сіи имѣютъ безконечно малыя высоты, то площадь каждой можно почитать состоящею изъ основанія ея, умноженнаго на высоту. И такъ представивъ основанія двухъ крайнихъ трапецій чрезъ B и b, общую высоту ихъ чрезъ h и число частей цѣлой высоты чрезъ n, можно искомую площадь изобразить чрезъ $\frac{Bh + bh}{2} \times n$ или чрезъ $\frac{B + b}{2} \times nh$; но nh представляетъ высоту данной большой тра-

пецїи, слѣд. для сысканїя площади ея должно умножить половину суммы двухъ противоположенныхъ основанїй на высоту.

О сысканїи Суммы степеней членовъ всякой Ариѳметической Прогрессїи.

174. Положимъ, что a, b, c, d и проч. представляютъ многія числа въ Ариѳметической прогрессїи, которой разность пусть будетъ r. И такъ . . . .

1ᵉ. Получимъ $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2ᵉ. По составленїи квадратовъ, получимъ

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$
$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$
$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$
$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2.$$

3ᵉ. По составленїи кубовъ, получимъ

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$
$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$
$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$
$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Естьли теперь сложены будутъ между собою квадратныя уравненія, потомъ куби-

ческія, то произойдетъ изъ такого сложенія по приведеніи равныхъ и подобныхъ членовъ, находящихся въ различныхъ частяхъ.

1ᵉ. $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$, или $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$. Изъ сего явствуетъ, что означивъ вообще число количествъ a, b, c, d и проч. чрезъ n, послѣднее чрезъ u, и сумму всѣхъ сихъ количествъ чрезъ s', можно вывести $u^2 = a^2 + 2r(s' - u) + (n - 1) r^2$, потому что $2r$ умножено въ вышеозначенной эквацiи на всѣ количества a, b, c и проч. безъ послѣдняго, и r^2 сложено само съ собою столько разъ, сколько находится всѣхъ уравненій, то есть, столько разъ безъ единицы, сколько находится всѣхъ количествъ a, b, c и проч; но какъ послѣднее уравненіе сіе заключаетъ s', то безъ всякаго труда можно вывести величину его, и слѣд. изображеніе суммы всѣхъ членовъ въ Ариѳметической прогрессіи. Сія величина s' представлена будетъ въ слѣдующемъ видѣ . . .

$$s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2r} + u.$$

2ᵉ. Естьли сложены будутъ равномѣрно кубическія уравненія, то по приведеніи равныхъ и подобныхъ количествъ, заключающихся въ разныхъ частяхъ, произойдетъ:

$e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$.

То есть, $e^3 = a^3 + 3r\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2\ (a + b + c + d) + 4r^3$.

Изъ уравненія сего можно видѣть, что количество умножающее $3r$, состоитъ изъ суммы квадратовъ всѣхъ членовъ безъ послѣдняго; что количество умножающее $3r^2$ представляетъ сумму всѣхъ количествъ безъ послѣдняго; что наконецъ кубъ r^3 сложенъ самъ съ собою столько разъ, сколько находится уравненій; и слѣд. означивъ вообще сумму квадратовъ чрезъ s'', послѣдній членъ чрезъ u, получимъ $u^3 = a^3 + 3r\ (s'' - u^2) + 3r^2\ (s' - u) + (n - 1)\ r^3$.

И такъ узнавши въ прогрессіи первой членъ, послѣдній, разность и число членовъ, можно помощію сей эквацiи опредѣлить величину s'', то есть, сумму квадратовъ, поелику количество s' найдено выше. Почему вставивъ въ мѣсто s' величину его, выведу уравненіе $u^3 = a^3 + 3r\ (s'' - u^2) + 3r^2 \left(\frac{u^2 - a^2 - (n - 1)\, r^2}{2}\right) + (n - 1)\ r^3$, или $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' - 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3.(n - 1).r^3 + 2.(n - 1).r^3$, а

изъ сего по совершеніи надлежащихъ дѣйствій $s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)r^3}{6r}$.

Естьли составивъ изъ уравненій $b = a + r$, $c = b + r$ и проч. четвертыя степени, сложимъ ихъ, и потомъ станемъ трактовать такимъ же образомъ, то получимъ сумму кубовъ. По тѣмъ же правиламъ поступая, найдемъ сумму членовъ прочихъ вышнихъ степеней.

Когда Ариѳметическая прогрессія предположена будетъ въ натуральномъ порядкѣ чиселъ, начинающихся съ единицы, именно такая 1, 2, 3 и проч.

Тогда произойдетъ $a = 1$, $u = n$; ибо вообще $u = a + (n - 1)r$, что въ настоящемъ случаѣ превращается въ $u = 1 + n - 1 = n$. Слѣд. величина s'' должна изобразиться въ такой прогрессіи чрезъ $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, то есть, чрезъ $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = n \times \ldots \frac{(n + 1) . (2n + 1)}{6}$.

175. Для показанія практическаго употребленія сихъ правилъ, положимъ, что требуется узнать число ядеръ, заключающееся въ квадратно-пирамидальной кучѣ, которой число ядеръ бока основанія извѣстно. Нѣтъ ни малаго сомнѣнія, что сія куча состоитъ

изъ нѣсколькихъ рядовъ параллельныхъ съ основанїемъ, и притомъ такихъ, которые съ низу на верьхъ постепенно уменьшаются единицею. Слѣд. сумма всѣхъ ядеръ должна состоять изъ суммы квадратовъ натуральнаго порядка чиселъ, простирающагося до количества n, означающаго число ядеръ бока основанїя, и изобразится чрезъ $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$; то есть, для опредѣленїя числа ядеръ всей кучи должно поступать по сему правилу: *къ числу ядеръ бока основанїя и къ удвоенному ему придай по единицѣ; умножь обѣ суммы между собою и произведенїе опять на тоже число ядеръ бока; наконецъ изъ послѣдняго сего произведенїя возми шестую часть.* На примѣръ естьли квадратно-пирамидальная куча будетъ заключать въ боку основанїя своего 6 ядеръ, то придавъ къ 6 и къ удвоенному ему 12 по 1, получу 7 и 13, которыя умножены будучи между собою, дадутъ въ произведенїи 91; произведенїе сїе умножу еще на 6; отъ чего произойдетъ 546, коего шестая часть 91 покажетъ число ядеръ всей кучи.

Естьли основанїе пирамидальной кучи будетъ занимать не квадратъ, но паралле раграммъ, то должно въ такомъ случаѣ вообразить ее раздѣленною на двѣ части такїя (*фиг.* 2), изъ которыхъ бы одна представляла квадратную пирамиду, о какой мы разсуждали выше, а другая призму. Для изчисленїя ядеръ, заключающихся въ сей призмѣ, должно умножить число ихъ, находящееся въ треугольникѣ CEH, на число ядеръ бока CB или AB — 1.

176. И такъ по изъясненному (173), положивъ m за число ядеръ верхняго бока AB, получимъ въ $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} + n.\frac{n+1}{2}.(m-1)$ количество, представляющее число всѣхъ ядеръ продолговатой кучи. Но сїе количество $= n.\frac{n+1}{2} \times (\frac{2n+1}{3} + m - 1) = n.\frac{n+1}{2} (\frac{3m+2n-2}{3}) = n.\frac{n+1}{2} \ldots (\frac{m+2(m+n-1)}{3})$.

А какъ явствуетъ, что $m + n - 1$ изображаетъ число ядеръ длинника кучи DF, или параллельнаго ему GI, то должно заключить, что *для опредѣленія числа ядеръ въ продолговатой кучѣ, должно умножить число ядеръ треугольной ея стороны на треть суммы трехъ параллельныхъ длинниковъ.*

И такъ положивъ, что самой меньшой длинникъ (*) AB содержитъ въ себѣ 21, а бокъ треугольнаго основанія 8, заключаю, что два прочїе параллельные длинника состоятъ каждой изъ 21 + 8 — 1, или изъ 28, и поступаю какъ слѣдуетъ . . .

Бокъ треугольнаго основанія	8
по прибавленіи 1	9
Треугольная сторона, или половинное произведенїе	36
Сумма трехъ длинниковъ	77
Число всѣхъ ядеръ (треть произведенія) . . .	924.

177. Явствуетъ изъ Геометріи, что толщина всякой пирамиды или конуса состоитъ изъ умноженія площади основанія ея на треть высоты. Сїю истинну можно доказать также выведенною для суммы квадратовъ формулою; но замѣтимъ напередъ, что естьли въ формулѣ $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ число членовъ n предположено будетъ безконечнымъ, то она должна превратиться въ другую такую $s'' = \frac{n^3}{3}$, или по причинѣ, что $u = n$ (какъ мы то видѣли выше), $s'' = \frac{u^2 n}{3} = u^2 . \frac{n}{3}$. Въ самомъ дѣлѣ предполагая n безконечнымъ количествомъ, должно предположить также, что никакое опредѣленное количество не можетъ увеличить его; почему въ настоящей выкладкѣ для показанія того, что заключаетъ въ себѣ означенное предположенїе, должно по необходимости почитать $n + 1$ и n за одно, также $2n + 1$ и $2n$ за одинакїя или равныя количества; послѣ чего

(*) Здѣсь подъ словомъ длинникъ разумѣется то, что Французы называютъ *Arête*.

формула $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ превращается въ

$s'' = \frac{n.n.2n}{6} = \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}$, или $s'' =$

$u^2.\frac{n}{3}$, по вставкѣ u^2 вмѣсто n^2.

Доказали мы въ Геометрїи (Геом. 202), что во всякой пирамидѣ, раздѣленной на слои, параллельные съ основанїемъ ея, слои содержатся между собою, какъ квадраты разстоянїй ихъ отъ верху. И такъ вообразивъ цѣлую высоту пирамиды раздѣленною на безчисленное множество равныхъ частей, заключимъ, что разстоянїя слоевъ должны итти въ простой прогрессїи чисελъ, а сами слои въ квадратномъ содержанїи ихъ; слѣд. сумма слоевъ найдется такимъ же образомъ, какъ сумма квадратовъ; а какъ по формулѣ $s'' = u^2.\frac{n}{3}$ должно умножить послѣднїй изъ квадратовъ на треть всего числа ихъ; слѣд. для полученїя суммы всѣхъ слоевъ, должно умножить послѣднїй изъ нихъ, то есть, основанїе пирамиды на треть числа слоевъ, то есть, на треть высоты пирамиды.

178. Узнавши находить сумму степеней многихъ чиселъ въ Ариѳметической прогрессїи, не трудно узнать, какъ находить оную и въ разныхъ другаго роду прогрессїяхъ. На примѣръ, естьли въ Ариѳметической прогрессїи ÷ 3. 7. 11. 15. 19 и проч. сложишь члены послѣдовательно между собою, то произойдетъ такой рядъ членовъ: 3, 10, 21, 36, 55 и проч., коихъ сумму опредѣлить возможно. Естьли члены и сего порядка сложены будутъ такимъ же образомъ, то про-

изойдетъ новой рядъ чиселъ: 3, 13, 34, 70, 125 и проч. котораго сумму также опредѣлить можно; поступая равномѣрно съ членами сего порядка и проч. заключенія выведемъ одинакія.

Поелику сумма членовъ Ариѳметической прогрессіи была выше представлена чрезъ $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, то по вставкѣ величины u, то есть, $u = a + r . (n - 1)$, она превращается въ $s = [2a + r . (n - 1)] \times \frac{n}{2}$. Сія послѣдняя величина s изображаетъ всякой членъ втораго порядка. Такимъ образомъ для опредѣленія суммы членовъ сего втораго порядка, надлежитъ сыскать оную въ порядкѣ количествъ $[2a + r (n - 1)] . \frac{n}{2}$, поставляя въ мѣсто n попеременно числа натуральной прогрессіи 1, 2, 3 и проч. А какъ сей порядокъ количествъ перемѣняется въ $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, въ которомъ a и r остаются одинаковы, какая бы величина ни была принята въ мѣсто n, то слѣдуетъ, что для сысканія суммы количествъ представленныхъ чрезъ an, надлежитъ опредѣлить оную въ количествахъ изображенныхъ чрезъ n, и умножить потомъ сумму сію на a; сумма же количествъ представленныхъ

чрезъ n, есть сумма чиселъ Ариѳметической прогрессіи въ натуральномъ порядкѣ. Тоже разсужденіе служитъ для $\frac{r}{2}n$. Что принадлежитъ до суммы $\frac{r}{2}n^2$, то надлежитъ сыскать оную въ количествахъ представленныхъ чрезъ n^2, потому что r остается и здѣсь одинаково, какое бы число ни было принято въ мѣсто n, то есть, надлежитъ взять сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ, и умножить ее на $\frac{r}{2}$. И такъ сумма количествъ an изобразится чрезъ $a.(n+1).\frac{n}{2}$; сумма количествъ $\frac{r}{2}n$ чрезъ $\frac{r}{2}.(n+1).\frac{n}{2}$, и напослѣдокъ сумма количествъ $\frac{r}{2}n^2$ чрезъ $\frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$; слѣд. сумма количествъ $an+\frac{r}{2}n^2-\frac{r}{2}n$, или сумма членовъ втораго порядка сдѣлается въ такомъ случаѣ равна $a.(n+1).\frac{n}{2}+\frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-\frac{r}{2}.(n+1)\frac{n}{2}$, или по приведеніи $a(n+1)\frac{n}{2}+r.\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$; а какъ каждой членъ третьяго порядка состоитъ изъ суммы членовъ втораго, то для сысканія суммы третьяго порядка надлежитъ находить оную въ различныхъ частяхъ послѣдняго сего результата, что можно сдѣлать

опредѣленіемъ суммы степеней чиселъ натуральнаго порядка. Естьли положимъ $a = 1$, и $r = 1$, то есть, что начальная прогрессія состоитъ изъ порядка натуральныхъ чиселъ, то прочія прогрессіи, о которыхъ теперь рѣчь идетъ, будутъ изображать *фигурныя числа.*

Можно по этимъ правиламъ находить сумму членовъ и такихъ порядковъ, которые происходятъ изъ сложенія порядка квадратовъ, или кубовъ и проч.; словомъ которые происходятъ изъ сложенія порядка членовъ всякой совершенной степени, хотя бы притомъ сіи степени были умножены на какія угодно извѣстныя числа.

Изъ изъясненнаго теперь можно вывести способъ, какъ опредѣлять число ядеръ въ треугольно-пирамидальной кучѣ; поелику въ ней всѣ ряды ядеръ параллельны съ основаніемъ, то каждой изъ нихъ долженъ (173) изобразиться чрезъ $n \cdot \frac{n+1}{2}$. Слѣд. число всѣхъ ядеръ будетъ состоять изъ суммы количествъ $n \times \frac{n+1}{2}$; а какъ въ величинѣ сей суммы, найденной выше, $r = 1$ и $a = 1$, то искомое число ядеръ сдѣлается послѣ сего равно $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$; но изъ послѣдняго сего изображенія выводимъ самое простое правило.

179. И на оборотъ, естьли по извѣстному числу ядеръ всякой треугольной кучи, потребуется узнать число n ядеръ каждаго ея длинника (arête); то представивъ въ такомъ случаѣ чрезъ a все число ихъ, получишь $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} = a$ или $n^3 + 3n^2 + 2n =$

ба эквацію, которую рѣши по предписанному (159) правилу. Можно еще рѣшить ее скорѣе такЪ: замѣтивЪ, что $n^3 + 3n^2 + 2n$ представляетЪ количество меньше куба составленнаго изЪ $n + 1$, заключи, что кубической корень изЪ $6a$ долженЪ быть меньше $n + 1$; по той же причинѣ $n^3 + 3n^2 + 2n$ представляетЪ количество больше куба изЪ $n - 1$, слѣд. кубической корень изЪ $6a$ долженЪ быть больше $n - 1$; а какЪ n должно состоять изЪ цѣлаго числа, то кубической корень изЪ $6a$ не можетЪ разниться сЪ n единицею, и слѣд. n будетЪ кубической корень самаго большаго куба, заключающагося вЪ $6a$.

Естьли случится искать тоже самое вЪ квадратной кучѣ, то получимЪ (175) такое уравненіе $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}$, или $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = a$, или $n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = 3a$, о которомЪ разсуждая, какЪ выше, заключимЪ, что количество n должно представлять корень самаго большаго куба, содержащагося вЪ $3a$.

О свойствахЪ и употребленіи Геометрическихъ Прогрессій.

180. Для сысканія суммы членовЪ Геометрической прогрессіи можно вывести сходственныя правила сЪ предыдущими.

ПоложимЪ, что a, b, c, d, e и проч. представляютЪ члены какой нибудь Геометрической возрастающей прогрессіи, которой q служитЪ знаменателемЪ содержанія. А какЪ извѣстно, что каждой членЪ вЪ сей прогрессіи содержитЪ q разЪ свой предЪидущій, то вывожу слѣдующія уравненія $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$ и проч. По

сложенiи сихъ уравненiй получаю $b + c + d + e = (a + b + c + d)\,q$, и заключаю, что вообще первая часть новаго сего уравненiя должна состоять изъ суммы всѣхъ членовъ безъ перваго, а вторая изъ знаменателя содержанiя, умноженнаго на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго. Слѣд. представивъ чрезъ s сумму всѣхъ членовъ, чрезъ u послѣднiй, перемѣняю эквацiю въ $s - a = (s - u)\,q$, или $s - a = qs - qu$; изъ послѣдней вывожу $qu - a = qs - s = (q - 1)\,s$, и слѣд. $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ формулу, по которой знавши первой членъ a, послѣднiй u и знаменателя содержанiя q, можно опредѣлить сумму s всѣхъ членовъ.

Сiя формула служитъ также и для умаляющихся прогрессiй, потому что умаляющiяся прогрессiи, взятыя въ обратномъ порядкѣ, становятся возрастающими; и слѣд. вся перемѣна должна состоять въ противномъ названiи *перваго* и *послѣдняго* членовъ.

Естьли умаляющаяся прогрессiя простирается въ безконечность, то сумма s превращается въ такомъ случаѣ въ $s = \frac{qu}{q - 1}$, и означаетъ здѣсь первой членъ. Въ самомъ дѣлѣ для показанiя въ исчисленiи такого

предположенія, надлежитЪ представить себѣ послѣдній членЪ безпредѣльно малымЪ такЪ, что онЪ вЪ разсужденіи *qu* долженЪ быть нуль или ничто.

СлѣдуетЪ изЪ сказаннаго, что *для опредѣленія суммы всѣхЪ членовЪ Геометрической прогрессіи, должно умножить самой большой ея членЪ на знаменателя (*) содержанія, изЪ произведенія вычесть самой меньшой, и остатокЪ раздѣлить на знаменателя содержанія, уменшеннаго единицею.* Для сысканія же суммы членовЪ вЪ прогрессіи, умаляющейся вЪ безконечность, надлежитЪ умножить самой большой членЪ ея на знаменателя содержанія, и произведеніе раздѣлить на того же знаменателя безЪ единицы.

ТакимЪ образомЪ сумма членовЪ сей прогрессіи, продолжающейся вЪ безконечность $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$ и проч. состоитЪ изЪ $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2 - 1}$, или изЪ 1; такая же сумма членовЪ выходитЪ и вЪ другой слѣдующей $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$ и проч. коей знаменатель, принимая ее за возрастающую, есть 3, потому что частное изЪ раздѣленія $\frac{2}{3}$ на $\frac{2}{9}$ равно 3; слѣд. сумма сія будетЪ вЪ самомЪ дѣлѣ состоять изЪ $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3 - 1}$, или по приведеніи

(*) ЧрезЪ знаменателя содержанія разумѣется здѣсь вообще то, сколько разЪ какой нибудь членЪ прогрессіи содержитЪ вЪ себѣ другой ближайше меньшой. Такое понятіе должно относить какЪ до возрастающихЪ, такЪ и умаляющихся прогрессій.

изЪ 1. Вообще сумма членовЪ всякой Геометрической прогрессіи, умаляющейся вЪ безконечность, коей каждой членЪ имѣетЪ одинаковаго числителя и притомЪ такого, которой меньше единицею знаменателя перваго члена, равняется 1. Ибо такая прогрессія изображается вообще чрезЪ $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \ldots$ $\frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}$ и проч., коей сумма равна . . .

$$\frac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$$, или $\frac{n}{n}$, то есть, 1.

181. Сказано было (Ариѳ. 196), что всякой членЪ Геометрической прогрессіи состоитЪ изЪ перваго, умноженнаго на знаменателя содержанія, возведеннаго вЪ такую степень, которая означается числомЪ предыдущихЪ до него членовЪ. И такЪ представивЪ чрезЪ a первой членЪ, чрезЪ u всякой искомой, чрезЪ q знаменателя содержанія и чрезЪ n число членовЪ, получимЪ $u = aq^{n-1}$; а какЪ вЪ семЪ уравненіи находятся четыре количества, то можно вывести изЪ него четыре формулы, которыя послужатЪ кЪ рѣшенію такого общаго вопроса; именно по даннымЪ тремЪ изЪ четырехЪ количествЪ, кои суть первой членЪ, послѣдній, знаменатель содержанія и число членовЪ, найти четвертое. Ибо 1е величина u выходитЪ непосредственно изЪ означеннаго уравненія; 2е величина a состоитЪ изЪ $a =$

$\frac{u}{q^{n}-1}$; 3^{e} что касается до величины q, то она по изъясненному (139) способу изобразится чрезъ $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Замѣтимъ здѣсь, что послѣднее сіе уравненіе заключаетъ въ себѣ тоже правило, какое изъяснили мы въ Ариѳметикѣ (198) для помѣщенія нѣсколькихъ пропорціональныхъ членовъ между двумя данными количествами. А какъ сіи количества въ разсматриваемой теперь прогрессіи суть a и u, то явствуетъ, что для опредѣленія знаменателя содержанія должно раздѣлить большое количество u на меньшое a, и потомъ изъ частнаго $\frac{u}{a}$ извлечь корень степени $n - 1$; но $n - 1$ означаетъ число предыдущихъ членовъ до искомаго, слѣд. и проч.

Хотя для опредѣленія величины n по уравненію $u = aq^{n-1}$ Алгебра не подаетъ прямаго способу; однако можно рѣшить сіе уравненіе по логариѳмамъ. Мы видѣли (Ариѳ. 213), что для возведенія количества въ какую нибудь степень помощію логариѳмовъ, должно умножить логариѳмъ того количества на показателя требуемой степени. И такъ представивъ чрезъ L слово *логариѳмъ*, могу взять $2La$ вмѣсто La^2, $3La$ вмѣсто La^3, nLa вмѣсто La^n. Напослѣдокъ припомнивъ,

что умноженіе, производимое помощію логариѳмовъ, перемѣняется въ сложеніе, а дѣленіе въ вычитаніе, заключаю изъ эквацiи $u = aq^{n-1}$, что $Lu = La + Lq^{n-1}$, или $Lu = La + (n-1)\,Lq$; по перестанвкѣ членовъ выходитъ $(n-1)\,Lq = Lu - La$, по раздѣленіи на Lq, $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, и наконецъ $n = \frac{Lu-La}{Lq} + 1$.

Дабы сдѣлать приноровку на послѣднее сіе правило, положимъ, что отдано 60000 рублей въ процентъ по 5 на 100 съ условіемъ приписывать проценты къ капиталу до тѣхъ поръ, пока сумма дойдетъ до 1000000. Спрашивается, во сколько лѣтъ сдѣлается такая сумма?

Поелику процентъ предполагается здѣсь $\frac{1}{20}$ частью капитала каждаго протекшаго года, то представивъ чрезъ a, b, c, d, e и проч. капиталы, долженствующіе возрастать изъ году въ годъ, получу $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$, то есть $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c \times (1 + \frac{1}{20})$, $e = d \times (1 + \frac{1}{20})$; отсюда явствуетъ, что капиталъ каждаго года заключаетъ въ себѣ свой предыдущій одинакое число разъ, которое означается здѣсь чрезъ $1 + \frac{1}{20}$ или $\frac{21}{20}$. И такъ порядокъ сихъ капиталовъ производитъ Геометрическую прогрессію, коей первый членъ a состоитъ изъ 60000 рублей, послѣдній u изъ 1000000 руб., знаменатель содержанія q изъ $\frac{21}{20}$; но число членовъ неизвѣстно.

Слѣд. для опредѣленія числа членовъ надлежитъ вставить въ формулѣ $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$ въ мѣсто a, u и q величины ихъ; послѣ чего произойдетъ $n = \frac{L1000000 - L60000}{L\frac{21}{20}} + 1$, или (потому что $L\frac{21}{20} = L21 - L20$), $n = \frac{L1000000 - L60000}{L21 - L20} + 1$; напослѣдокъ по прі-

исканіи въ таблицахъ логариѳмовъ данныхъ чиселъ $L1000000 = 6,0000000$; $L60000 = 4,7781513$, $L21 = 1,3222193$; $L20 = 1,3010300$, выходитъ $n = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{1,3222193 - 1,3010300} + 1 =$ близу $58,7$; то есть, капиталъ состоящій изъ 60000 обратится въ 1000000 по истеченіи 58 лѣтъ и $8\frac{1}{2}$ мѣсяцовъ.

Поелику для извлеченія какой нибудь степени изъ даннаго количества посредствомъ логариѳмовъ, должно (Ариѳ. 214) раздѣлить логариѳмъ того количества на показателя извлекаемой степени; и потому можно безъ всякаго труда рѣшить въ числахъ выведенное выше уравненіе $q = \sqrt[n-1]{\frac{n}{a}}$, ибо оно превращается въ $Lq = \frac{L\frac{u}{a}}{n-1} = \frac{Lu - La}{n-1}$.

Дабы показать употребленіе сей формулы на самой практикѣ, то положимъ, что въ предыдущемъ вопросѣ требуется узнать, какъ долженъ быть великъ процентъ на капиталъ 60000, которой по истеченіи $57\frac{7}{10}$ лѣтъ доходитъ до 1000000 рублей. Почему въ силу требованія a будетъ $= 60000$, $u = 1000000$, $n = 58\frac{7}{10}$; и слѣд. по пріисканіи въ таблицахъ Логариѳмовъ, и по вставкѣ ихъ получимъ $Lq = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7}$, а по раздѣленіи $Lq = 0,0211757$; сей логариѳмъ отвѣчаетъ въ таблицахъ близу $1,0500$; по приведеніи сего послѣдняго числа въ двадцатыя части, выходитъ $\frac{21}{20}$; а изъ этого должно заключить, что процентъ состоитъ изъ $\frac{1}{20}$ капитала.

182. Изъ уравненія $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ можно вывести такимъ же образомъ, какъ показано

было выше, четыре другія, которыя будутЪ служить кЪ рѣшенію слѣдующаго общаго вопроса; именно, по тремЪ извѣстнымЪ количествамЪ изЪ четырехЪ, кои суть сумма членовЪ, знаменатель содержанія, первой и послѣдній члены Геометрической прогрессіи, опредѣлить четвертое. Это такЪ легко, что мы не намѣрены останавливаться.

НаконецЪ естьли вЪ какомЪ нибудь изЪ двухЪ уравненій $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ и $u = aq^{n-1}$, выведена будетЪ величина одинаковаго количества a или q или u, и поставится вЪ другомЪ, то произойдутЪ послѣ сего другія уравненія, которыя послужатЪ кЪ рѣшенію слѣдующаго вопроса; то есть, по тремЪ извѣстнымЪ количествамЪ изЪ пяти, кои суть первой членЪ, послѣдній, знаменатель содержанія, сумма и число членовЪ всякой Геометрической прогрессіи, опредѣлить четвертое.

О Геометрической Конструкціи Алгебраическихъ количествъ.

183. Поелику линеи, поверхности и тѣла суть количества, то можно производить надЪ каждымЪ изЪ трехЪ сихЪ протяженій такія же дѣйствія, какія мы научились про-

изводить вЪ числахЪ и АлгебраическихЪ количествахЪ. Результаты, выходящія изЪ сихЪ дѣйствій, изчисляются двоякимЪ образомЪ, вЪ числахЪ или вЪ линеяхЪ. Первой способЪ, вЪ которомЪ предполагаются данныя количества изображенными вЪ числахЪ, не представляетЪ теперь никакой трудности: ибо стоитЪ только вЪ заключительныхЪ экваціяхЪ поставить вЪ мѣсто буквЪ числовыя ихЪ величины, и совершить дѣйствія по расположенію знаковЪ и буквЪ.

ЧтожЪ касается до представленія результатовЪ АлгебраическихЪ рѣшеній вЪ линеяхЪ, то способЪ онаго основывается вопервыхЪ на познаніи значеній или свойствЪ нѣкоторыхЪ главныхЪ изображеній (expressions), потомЪ всѣхЪ прочихЪ, кЪ главнымЪ относящихся. Мы покажемЪ напередЪ, какЪ должно поступать сЪ первыми, потомЪ какЪ относить кЪ нимЪ прочія; и это-то значитЪ *дѣлать конструкцію* или *сочиненіе* АлгебраическимЪ количествамЪ или задачамЪ, изЪ которыхЪ выходятЪ сіи количества.

184. Естьли количество, для котораго нужно сдѣлать конструкцію, будетЪ раціональное (то есть безЪ радика), и притомЪ число протяженій числителя его пре-

восходитЪ единицею число протяженій знаменателя, то для сочиненія такого количества, говорю я, должно всегда искать четвертую пропорціональную линею кЪ даннымЪ тремЪ. ВотЪ примѣры:

НапримѣрЪ требуется сдѣлать конструкцію для количества $\frac{ab}{c}$, вЪ которомЪ a, b, c означаютЪ извѣстныя линеи. Проведи (*фиг.* 3) двѣ неопредѣленныя линеи AZ, AX подЪ произвольнымЪ угломЪ; на какомЪ нибудь боку AX сего угла возми часть AB, равную линеѣ представленной буквою c, потомЪ часть AD равную той или другой изЪ остальныхЪ линей a и b, на примѣрЪ равную линеѣ a, наконецЪ на второмЪ боку AZ положи часть AC, равную линеѣ b. По соединеніи концовЪ B и C линеею BC, проведи изЪ конца D линею DE, параллельную сЪ BC; сія линея DE опредѣлитЪ на боку AZ часть AE, равную величинѣ количества $\frac{ab}{c}$. Ибо извѣстно (Геом. 102), что по причинѣ параллельныхЪ DE и BC можно вывести слѣдующую пропорцію AB : AD = AC : AE, то есть, $c : a = b :$ AE; слѣд. AE $= \frac{ab}{c}$, то есть, для опредѣленія AE должно сыскать кЪ тремЪ даннымЪ линеямЪ четвертую пропорціональную. А какЪ для сысканія сей четвертой пропорціональной линеи предлагаются (Геом. 118) два способа, то для сочиненія количества $\frac{ab}{c}$ можно употреблять безЪ разбору тотЪ и другой.

Не трудно замѣтить, что для сочиненія количества $\frac{aa}{c}$, должно поступать по предыдущему примѣру; потому что линея b вЪ теперешнемЪ случаѣ становится равною линеѣ a.

При сочиненіи количества $\frac{bab + d}{c + d}$ надлежитъ замѣтить, что это количество будетъ одинаково съ $\frac{(a + d)b}{c + d}$; и такъ принявъ $a + d$ за одну линею представленную чрезъ m, а $c + d$ также за одну линею n, получимъ для конструкціи количество $\frac{mb}{n}$ такое, какое показано въ первомъ случаѣ.

Естьли дано будетъ для конструкціи количество $\frac{aa - bb}{c}$, то должно припомнить, что $aa - bb$ произходитъ изъ $(a + b)(a - b)$; и слѣд. представивъ $\frac{aa - bb}{c}$ въ такомъ видѣ $\frac{(a + b)(a + b)}{c}$, сыщи четвертую пропорціональную линею къ c, $a + b$ и $a - b$.

Естьли данное для конструкціи количество будетъ такое $\frac{abc}{de}$, то поставь его въ слѣдующемъ видѣ $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; сочини $\frac{ab}{d}$ по показанному выше способу, и назвавъ m линею, произшедшую изъ сей конструкціи, получишь въ мѣсто $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$ количество $\frac{mc}{e}$, которому не трудно сдѣлать конструкцію.

Изъ сего явствуетъ, что для сочиненія $\frac{a^2b}{c^2}$ надлежитъ представить его чрезъ $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$, сдѣлать напередъ конструкцію для $\frac{a^2}{c}$, потомъ изобразивъ найденную величину чрезъ m, сочинить количество $\frac{mb}{c}$.

Итакъ все искуство въ производствѣ конструкцій состоитъ въ раздѣленіи даннаго количества на

части, изъ которыхъ бы каждая превращалась въ подобной видъ $\frac{ab}{c}$ или $\frac{a^2}{c}$; а хотя это можетъ показаться иногда труднымъ, однако при помощи переменъ получаемъ наконецъ желаемое.

На примеръ естьли дано будетъ сделать конструкцію для $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$; то положивъ произвольно $b^3 = a^2m$, и $c^2 = an$, превращаю $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ въ количество $\frac{a^3 + a^2m}{a^2 + an}$, которое по приведеніи становится равно $\frac{a^2 + am}{a + n}$ или $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$; но для сего последняго количества не трудно сделать конструкцію по вышеозначенному способу, какъ скоро будутъ известны m и n. Для определенія же m и n вывожу изъ эквацій $b^3 = a^2m$ и $c^2 = an$ другія такія $m = \frac{b^3}{a^2}$ и $n = \frac{c^2}{a}$, для коихъ конструкція должна быть такая же.

Не редко количества представляются въ такомъ виде, что всякая перемена, производимая надъ ними, остается безполезною; это случается тогда, когда данное количество бываетъ *неоднородное* (non homogene), то есть тогда, когда каждой членъ числителя и знаменателя состоитъ не изъ одного числа факторовъ; примеръ сего видеть можно въ следующемъ количестве $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Со всемъ темъ должно заметить, что мы до подобнаго результата доходимъ только въ такомъ случае, когда въ продолженіи решенія некоторое изъ количествъ для простейшей выкладки предположено было равнымъ единице. На примеръ въ количестве $\frac{a^3 + b^2c}{a^2 + c^2}$ предположивъ b равнымъ 1, получу вместо его другое такое $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. А какъ не льзя сочинять такія количества не знавши правилъ, то заметимъ,

что во всякомъ случаѣ можно узнавать то количество, которое предположено равнымъ единицѣ, и слѣд. не трудно вставить его безъ перемѣны величины въ членахъ сочиняемаго количества, потому что отъ умноженія на единицу число не перемѣняется; только вставливая такую линею, принятую за единицу, должно для каждаго члена возводить ее въ приличную степень. На примѣръ естьли дано будетъ для сочиненія такое количество $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$, то положивъ, что d представляетъ линею, которая была принята за единицу, напишу его въ другомъ видѣ такъ $\frac{a^3 + bd^2 + c^2d}{ad + b^2}$ и стану дѣлать конструкцію, полагая $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ и $a^3 = d^2p$; послѣ чего оно перемѣнится въ $\frac{d^2p + bd^2 + d^2n}{ad + dm}$, или въ $\frac{dp + bd + dn}{a + m}$, или въ $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$, въ такое напослѣдокъ количество, для котораго не трудно сдѣлать конструкцію, какъ скоро будутъ извѣстны m, n, p; величины же сихъ количествъ опредѣляются чрезъ конструкцію слѣдующихъ уравненій $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$.

Хотя мы предполагали вездѣ въ предыдущихъ разсужденіяхъ, что число факторовъ или число измѣреній каждаго члена числителя превосходитъ единицею число измѣреній знаменателя; однако можетъ оно превосходить двумя и тремя, но никогда большимъ числомъ, кромѣ тѣхъ случаевъ, когда нѣкоторая изъ линей будетъ принята за единицу, или когда нѣкоторые изъ факторовъ будутъ представлять числа.

185. Когда число измѣреній числителя даннаго количества превосходитъ число измѣреній знаменателя двумя единицами, тогда такое количество изображаетъ поверх-

ность, и конструкція производится посредствомъ параллелограмма или квадрата.

На примѣръ естьли дано будетъ сдѣлать конструкцію для количества $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$, то вопервыхъ представляю его въ видѣ $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; потомъ превративъ $\frac{a^2 + ab}{a + c}$ въ $a \times \frac{a + b}{a + c}$, сочиняю послѣднее количество по вышеозначенному правилу. То, что выходитъ изъ сей конструкціи, представляю чрезъ m; отъ чего количество $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$ перемѣняется въ $a \times m$; наконецъ сдѣлавъ изъ a высоту, а изъ m основаніе параллелограмма, получу въ $a \times m$ площадь того параллелограмма; и слѣд. на оборотъ площадь сія должна представлять количество $a \times m$ или $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

Можно вывести такуюже конструкцію и для количества $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, сдѣлавъ $bc = am$ и $d^2 = an$; ибо оно становится въ такомъ случаѣ равно . . . . $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$ или $a\left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}\right)$; но факторъ $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ равно какъ и величины m и n относятся къ предыдущимъ конструкціямъ; слѣд. сдѣлавъ ихъ, опредѣли величину сего фактора чрезъ p, и сочини потомъ количество $a \times p$; то есть, сдѣлай параллелограммъ, котораго бы высотою было a, а основаніемъ p.

186. Наконецъ когда число измѣреній числителя даннаго количества превосходитъ число измѣреній знаменателя тремя едини-

цами, тогда такое количество предста- вляетЪ тѣло, и конструкція производится посредствомЪ параллелипипеда.

На примѣрЪ естьли дано будетЪ сочинить такое количество $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$; то представивЪ его вЪ видѣ $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$, сдѣлаю конструкцію для $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, какЪ было показано; потомЪ представивЪ чрезЪ m линею выведенную изЪ сей конструкціи, получу для сочиненія $ab \times m$; а какЪ ab представляетЪ параллелограммЪ, то сдѣлавЪ наконецЪ такой параллелипипедЪ, котораго бы основаніемЪ былЪ сей параллелограммЪ, а высотою линея m, получу вЪ толщинѣ сего параллелипипеда количество $ab \times m$, то есть, $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$.

187. ПосредствомЪ изЪясненнаго можно сочинять вообще всякое раціональное количество. ПосмотримЪ теперь, какЪ сочиняются количества сЪ радикальными знаками второй степени.

Для конструкціи сихЪ послѣднихЪ должно искать, или среднюю пропорціональную между данными двумя линеями, или гипотенузу, или какой нибудь катетЪ прямоугольнаго треугольника.

На примѣрЪ для сочиненія $\sqrt{ab}$, надлежитЪ (фиг. 4) провести линею AB неопредѣленной величины, на которой положить рядомЪ AC равную линеѣ a, и CB равную линеѣ b; на всей AB какЪ на діаметрѣ описать полкруга, и изЪ C поставить перпенди-

куляръ: сей перпендикуляръ CD, продолженный до окружности, будетъ представлять величину $\sqrt{ab}$. Изъ сего явствуетъ, что для опредѣленія величины $\sqrt{ab}$ должно сыскать среднюю пропорціональную линею между a и b. Ибо извѣстно (Геом. 121), что $AC : CD = CD : CB$, или $a : CD = CD : b$, а по умноженіи крайнихъ и среднихъ выходитъ $(CD)^2 = ab$, и слѣд. $CD = \sqrt{ab}$.

Изъ предыдущаго не трудно примѣтить, какъ должно поступать при превращеніи всякой площади въ квадратъ. Естьли потребуется превратить въ квадратъ параллелограммъ, коего высотою служитъ a, а основаніемъ b, то назвавъ x бокъ искомаго квадрата, заключаю, что $x^2 = ab$, и слѣд. $x = \sqrt{ab}$. Послѣднее уравненіе показываетъ, что для опредѣленія бока x искомаго квадрата надлежитъ найти среднюю пропорціональную линею между основаніемъ и высотою даннаго параллелограмма. А поелику извѣстно, что треугольникъ состоитъ изъ половины параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одинакое основаніе и одинакую высоту, то для превращенія всякаго треугольника въ квадратъ, надлежитъ сыскать среднюю пропорціональную линею между основаніемъ и половинною высотою его, или между цѣлою высотою и половиннымъ основаніемъ.

Для превращенія круга въ квадратъ, должно сыскать среднюю пропорціональную линею между радіусомъ и половинною окружностію его; наконецъ для превращенія въ квадратъ всякой прямолинейной фигуры, надлежитъ напередъ превратить ее (Геом. 137) въ треугольникъ, и потомъ между половиннымъ основаніемъ и высотою его, или цѣлымъ основаніемъ и половинною высотою найти среднее пропорціональное количество.

Но естьли будетъ дана не фигура, а Алгебраическое изображеніе поверхности посредствомъ нѣкоторыхъ ея измѣреній; то должно производить конструкцію въ такомъ случаѣ по нижеслѣдующимъ наблюденіямъ.

На примѣръ естьли будетъ дано такое количество $\sqrt{(3ab + b^2)}$, то представивъ его въ видѣ $\sqrt{[(3a + b) \times b]}$, найди среднюю пропорцїональную между $3a + b$ и b.

Равномѣрно для сочиненїя $\sqrt{(aa - bb)}$, надлежитъ представить его чрезъ $\sqrt{[(a + b) \times (a - b)]}$, и взять среднюю пропорцїональную между $a + b$ и $a - b$.

Для сочиненїя $\sqrt{(a^2 + bc)}$ сдѣлай $bc = am$; отъ него $\sqrt{(a^2 + bc)}$ перемѣнится въ $\sqrt{(a^2 + am)}$ или въ $\sqrt{[(a + m) \times a]}$; и такъ сдѣлавъ конструкцїю для количества m по эквацїи $m = \frac{bc}{a}$, сыщи потомъ среднюю пропорцїональную между $a + m$ и a.

Для сочиненїя $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ можно поступать по предыдущему случаю; ибо по предположенїи $b^2 = am$, оно обращается въ $\sqrt{[(a + m) \times a]}$. Однако лучше дѣлать конструкцїю для такого количества по свойству прямоугольнаго треугольника (Геом. 164), и именно: проведи линею AB (*фиг.* 5) равную линеѣ a, и на концѣ ея A поставь перпендикуляръ AC равный b; послѣ чего проведи линею BC, въ величинѣ которой получишь количество $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (Геом. 164), $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; слѣд. $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Можно помощїю прямоугольнаго треугольника сочинить вышеозначенное количество $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ иначе такимъ образомъ. Проведи (*фиг.* 7) линею AB равную a, и описавъ на AB, какъ на поперешникѣ полкруга ACB, положи изъ точки A хорду AC равную b; тогда по проведенїи BC, получишь въ сей линеѣ величину количества $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC (Геом. 164), $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$, также $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; и слѣд. $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Можно сдѣлать другую конструкцїю и для количества $\sqrt{(a^2 + bc)}$, противную выше показанной слѣдующимъ образомъ: сдѣлай $bc = m^2$ и сочини $\sqrt{(a^2 + m^2)}$, какъ было предписано; для опредѣленїя же m^2 сыщи среднюю пропорцїональную между b и c.

Естьли радикальное количество будетъ состоять больше, нежели изъ двухъ членовъ, то должно дѣлать для него конструкцію посредствомъ показанныхъ превращеній. На примѣръ естьли дано будетъ сочинить такое количество $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, то положивъ $bc = am$, $ef = an$, получу $\sqrt{(a^2 + am + an)}$ или $\sqrt{[(a + m + n) \times a]}$; и слѣд. по опредѣленіи величинъ m и n въ экваціяхъ $m = \frac{bc}{a}$ и $n = \frac{ef}{a}$, состоитъ потомъ для сочиненія $\sqrt{[(a + m + n) \times a]}$ сыскать среднюю пропорціональную между $a + m + n$ и a. Могу также положить $bc = m^2$, $ef = n^2$, и тогда произойдетъ $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$. Но естьли радикальное количество заключаетъ въ себѣ нѣсколько положительныхъ квадратовъ, на примѣръ $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 +}$ и проч.), то должно въ такомъ случаѣ сдѣлать $\sqrt{(a^2 + m^2)} = h$, $\sqrt{(h^2 + n^2)} = l$, $\sqrt{(l^2 + p^2)} = k$, и такъ далѣе; а какъ каждое изъ сихъ количествъ опредѣляется предыдущимъ, то послѣднее будетъ представлять величину $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 +}$ и проч.). Для сочиненія же сихъ количествъ простѣйшимъ образомъ, надлежитъ попеременно принимать каждую гипотенизу за бокъ; на примѣръ по продолженіи AB $= a$ (*фиг.* 6), поставь перпендикуляръ AC $= m$, и проведи BC, которая представитъ h; поставь изъ точки C на BC перпендикуляръ CD $= n$, и проведи BD, которая будетъ отвѣчать l; изъ точки D поставь на BD перпендикуляръ DE $= p$, точки B и E соедини прямою линеею BE, которая представитъ величину k или $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2)}$.

Естьли нѣкоторые изъ сихъ квадратовъ будутъ отрицательные, то къ изъясненной теперь конструкціи должно присоединить еще ту, которая показана была для $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Наконецъ естьли сочиняемое количество будетъ имѣть такой видъ $\frac{a\sqrt{(b + c)}}{\sqrt{(d + e)}}$, то перемѣнивъ его въ $\frac{a\sqrt{(b + c)(d + e)}}{d + e}$ чрезъ умноженіе обоихъ членовъ дроби на $\sqrt{(d + e)}$, сыщи среднюю пропорціо-

нальную между $b + c$ и $d + c$; потомъ представивъ ее чрезъ m, сдѣлай конструкцїю для $\frac{am}{d+e}$.

Поелику многїя конструкцїи зависятъ отъ опредѣленїя средней пропорцїональной линеи, то не безполезно, думаю, помѣстить здѣсь еще два способа находить такого рода линею. Способы сїи, глядя по вопросамъ, могутъ сдѣлать иногда рѣшенїе исправнѣйшимъ.

Первой состоитъ въ слѣдующемъ: опиши на какой нибудь AB изъ данныхъ двухъ линей *фиг.* 7) полкруга ACB, и опредѣливши на ней часть AD, равную другой линеѣ, поставь перпендикуляръ DC; проведи потомъ хорду AC, которая представитъ среднюю пропорцїональную между AB и AD; ибо по проведенїи другой хорды CB, треугольникъ ACB сдѣлается прямоугольнымъ (Геом. 65); и слѣд. AC (Геом. 112) должна изображать среднюю пропорцїональную между гипотенузою AB и отрѣзкомъ AD.

Второй способъ есть такого рода: проведи (*фиг.* 8) линею AB, равную данной большой, и взявши на ней часть AC, равную меньшой, опиши на остаткѣ BC полкруга CDB; изъ точки A проведи къ окружности тангенсъ AD, которой изобразитъ (Геом. 124) среднюю пропорцїональную между AB и AC.

И такъ явствуетъ изъ сказаннаго, что рацїональныя количества сочиняются посредствомъ прямыхъ линей, а количества съ радикалами второй степени посредствомъ круга и прямыхъ линей вмѣстѣ.

Чтожъ принадлежитъ до конструкцїи количествъ съ радикалами вышнихъ степеней, то она дѣлается чрезъ совокупленїе разныхъ кривыхъ линей.

Займемся напередъ такими задачами, которыхъ рѣшенїе состоитъ или въ рацїональныхъ или въ радикальныхъ второй степени количествахъ.

Разные Геометрическіе вопросы и разсужденія, какъ о способѣ выводить изъ нихъ уравненія, такъ и о различныхъ рѣшеніяхъ сихъ уравненій.

188. Правило (60), въ которомъ показали мы способъ выводить изъ всѣхъ вопросовъ уравненія, употребляется равно и въ Геометрическихъ задачахъ. Здѣсь должно также искомое количество изображать извѣстнымъ знакомъ, и разсуждать по сему знаку и по прочимъ, представляющимъ другія количества, какъ бы все въ данномъ вопросѣ было извѣстно, и мы намѣрены его повѣрять. Такое дѣлопроизводство называется *Аналитикою.* Чтобъ быть въ состояніи дѣлать повѣрку посредствомъ такихъ разсужденій, надлежитъ имѣть понятіе по крайней мѣрѣ о нѣкоторыхъ свойствахъ искомаго количества; и слѣд. тогда только можемъ выводить изъ Геометрическихъ задачь эквацiи, когда твердо вкоренятся въ памяти нашей понятія, изъясненныя во второй части сего курса. Многіе вопросы, данные въ числахъ, или вопросы такого рода, какіе показаны были въ первомъ отдѣленіи, часто рѣшатся однимъ переводомъ содержанія ихъ на Алгебраической языкъ; но Геометрическія задачи требуютъ еще другихъ

способовъ. Въ послѣдствіи мы не преминемъ познакомить читателей своихъ съ сими средствами; а на этотъ разъ скажемъ вообще, что не всегда нужно для повѣрки какого нибудь количества изслѣдовать, выполняетъ ли оно всѣ условія даннаго вопроса; но часто бываетъ довольно и того, когда количество сіе имѣетъ извѣстныя свойства, которыя существенно соединены съ условіями вопроса. По такомъ разсужденіи, которымъ еще будемъ имѣть случай заняться, приступимъ къ примѣрамъ, которые объясняютъ дѣло лучше, нежели самыя правила.

189. Положимъ, что первымъ вопросомъ требуется *начертить квадратъ* ABCD (фиг. 9) *въ данномъ треугольникѣ* EHI.

Подъ словами *данной треугольникъ* разумѣется здѣсь такой, въ которомъ все извѣстно: бока, углы, высота и проч.

Съ малѣйшимъ вниманіемъ можно примѣтить, что въ силу сего вопроса должно опредѣлить на высотѣ EF такую точку G, чрезъ которую проведенная линея AB параллельно съ HI должна быть равна GF. И такъ эквація выходитъ сама собою; стоитъ только опредѣлить Алгебраически AB и FG, и потомъ ихъ приравнять.

Представимъ чрезъ a извѣстную высоту EF, чрезъ b извѣстное основаніе HI, и чрезъ x неизвѣстную линею GF; послѣ чего EG будетъ равно $a - x$.

А какъ AB параллельна съ HI, то (*Геом.* 109) можетъ имѣть мѣсто такая пропорція EF : EG = FI : GB = HI : AB; то есть, EF : EG = HI : AB, или $a : a - x = b :$ AB, слѣд. (*Арив.* 169) AB $= \frac{ab - bx}{a}$; а какъ притомъ AB должна быть равна GF, то $\frac{ab - bx}{a} = x$; изъ сего уравненія выходитъ по правиламъ перваго отдѣленія $x = \frac{ab}{a + b}$.

Теперь чтобъ сдѣлать конструкцію для сего количества, должно въ сходственность сказаннаго (184) найти четвертую пропорціональную къ $a + b$, a и b; въ разсужденіи чего поступай такъ: перенеси изъ F въ O линею FO равную $a + b$, то есть, равную EF + HI, и проведи EO; потомъ взявши FM равную HI $= b$, протяни параллельно съ EO линею MG, которая пересѣкшись съ EF опредѣлитъ GF за сходственную величину x; ибо по причинѣ подобныхъ треугольниковъ FO : FM = FE : FG, или

$a + b : b = a :$ FG; слѣд. FG должна быть равна $\frac{ab}{a+b}$.

190. Предложимъ вторымъ вопросомъ слѣдующій: *Даны длина линеи* BC *и углы* B *и* C, *которые состоятъ изъ той линеи и двухъ другихъ* AB *и* AC; *опредѣлить, на какой высотѣ* AD *послѣднія сіи линеи сходятся.*

Въ Алгебраическихъ выкладкахъ допускаются углы посредствомъ линей, употребляемыхъ въ Тригонометріи, то есть, посредствомъ синусовъ, тангенсовъ и проч. Такимъ образомъ чрезъ данной уголъ, на примѣръ C должно разумѣть, что дана величина его синуса или тангенса. По предположеніи сего пусть будетъ BC $= a$, AD $= y$,. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ADC, получимъ (*Геом.* 300) CD : DA какъ радіусъ къ тангенсу угла ACD, или CD : $y = r : m$, назвавъ r радіусъ, а m тангенсъ угла ACD; слѣд. (*Ариѳ.* 169) CD $= \frac{ry}{m}$. Разсуждая такимъ же образомъ, получимъ, назвавъ n тангенсъ угла ABD, BD : $y = r : n$, и слѣд. BD $= \frac{ry}{n}$; а какъ BD + DC = BC $= a$, то $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$. Изъ сего уравненія величина y выходитъ такая $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

Можно сдѣлать изображеніе сіе проще; поставивши на мѣсто тангенсовъ m и n двухъ угловъ C и B котангенсы ихъ, которые назовемъ p и q. Для сего случая надлежитъ припомнить (*Геом.* 295), что *танг.* $: r = r :$ *кот.*; и такъ въ силу сего предложенія можно послать $m : r = r : p$, и $n : r = r : q$; величины m и n опредѣлятся слѣдующими уравненіями $m = \frac{r^2}{p}$, а $n = \frac{r^3}{q}$, слѣд. $mn = \frac{r^4}{pq}$, а $rn + rm = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q} = \frac{r^3(p+q)}{pq}$; наконецъ $y = \frac{ar}{p+q}$.

Для конструкціи сего количества должно сыскать четвертую пропорціональную линею между $p + q$, r и a.

191. *Даны высоты* AC *и* BD *двухъ предметовъ* C *и* D (фиг. 11) *въ нѣкоторой плоскости, и разстояніе ихъ* AB *параллельное съ тою плоскостію; опредѣлить на* AB *такую точку* E, *которая бы находилась въ равномъ разстояніи отъ* C *и* D?

Естьли можно провести прямую линею отъ C къ D, то для опредѣленія искомой точки E стоитъ только изъ середины CD поставить перпендикуляръ KE, которой неминуемо упадетъ въ E. Когдажъ не льзя

шого сдѣлать, тогда точку E должно опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Положи $AC = a$, $DB = b$, $AB = c$, $AE = x$; отъ чего произойдетъ $BE = c - x$, $CE = \sqrt{(aa + xx)}$ (Геом. 164), $DE = \sqrt{[bb + (c - x)^2]}$. А какъ по требованію $CE = DE$, слѣд. $\sqrt{(aa + xx)} = \sqrt{[bb + (c - x)^2]}$. По составленіи въ сей эквацiи квадратовъ, и напослѣдокъ по перестановкѣ членовъ найдется $x = \frac{cc - aa + bb}{2c} = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}.\frac{(a + b)(a - b)}{c}$. Для сочиненія сего количества поступай такъ.

Изъ середины L линеи AB проведи ILG параллельную съ AC, которая пересѣчетъ въ G прямую DF параллельную съ AB; сдѣлай $LI = \frac{1}{2}c = LA$, $LH = \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}CF$, и $LO = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b) + b = GH$; соедини точки I и O прямою IO, и проведи изъ точки H параллельную къ ней HE, которая и опредѣлитъ на AB искомую точку E. Ибо $LI : LO = LH : LE$, то есть, $\frac{1}{2}c : \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(a - b) : LE$; почему $LE = \frac{\frac{1}{2}(a+b) \times \frac{1}{2}(a-b)}{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; но $AE = AL - LE = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; слѣд. $AE = x$.

192. Возмемъ для четвертаго примѣра такой вопросъ, которой покажетъ намъ, какъ должно выводить уравненія изъ Геометрическихъ задачь, и какъ чрезъ разныя пріуготовленія сихъ уравненій можно открывать новыя предложенія.

По извѣстнымъ тремъ бокамъ какого нибудь треугольника ABC (фиг. 12), *найти отрѣзки* AD *и* DC *и перпендикуляръ* BD, *которой производитъ тѣ отрѣзки.*

Естьли извѣстны будутъ искомыя линеи, то для повѣрки стану поступать такъ: сложу квадратъ BD съ квадратомъ CD, и посмотрю, будетъ ли сумма ихъ равна квадрату BC, потому что треугольникъ BDC есть прямоугольной (*Геом.* 164). Равномѣрно сложивъ квадратъ AD съ квадратомъ BD, увѣрюсь въ исправности рѣшенія чрезъ равенство суммы сей съ квадратомъ AB.

Поступая по сему разсужденію, положимъ BD $= y$, CD $= x$, BC $= a$, AB $= b$, AC $= c$; послѣ чего AD $=$ AC $-$ CD будетъ также $= c - x$. И такъ заключимъ, что $xx + yy = aa$, и $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Поелику xx и yy въ каждомъ уравненіи имѣютъ коеффиціентомъ единицу, то вычитаю второе уравненіе изъ перваго; въ остаткѣ получаю вдругъ $2cx - cc = aa - bb$, изъ котораго вывожу $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, что можно изобразить иначе такимъ образомъ:

$$x = \frac{1}{2} \frac{(a + b)(a - b)}{c} + \frac{1}{2} c.$$

Но для опредѣленія величины x подъ такимъ видомъ уравненія, должно сыскать четвертую пропорціональную линею между c, $a + b$ и $a - b$, потомъ къ половинѣ ея прибавить $\frac{1}{2} c$, то есть половину бока АС; что точно сходствуетъ съ сказаннымъ (Геом. 307).

Изъ сихъ же эквацій можно вывести множество другихъ заключеній: мы намѣрены предложить нѣкоторыя, чтобъ пріучить начинающихъ проницать въ содержаніе уравненій.

193. 1е, Уравненіе $2cx - cc = aa - bb$ есть одинаково съ $c.(2x - c) = (a + b)(a - b)$. А какъ произведеніе двухъ первыхъ факторовъ во второй экваціи равно произведенію двухъ послѣднихъ, то можно принять два первые фактора за крайніе члены пропорціи, а два послѣдніе за средніе, и представить ее чрезъ $c : a + b = a - b : 2x - c$; но $2x - c$ есть тожъ, что $x - (c - x)$; слѣд. поста-

вивъ на мѣсто сихъ буквъ представляемыя ими линеи, получу AC : BC + AB = BC — AB : CD — AD, что сходствуетъ съ доказаннымъ (Геом. 306) предложенїемъ.

194. 2е. Естьли изъ точки C, какъ изъ центра, радїусомъ равнымъ BC опишется дуга BO и проведется хорда BO, то произойдетъ $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; но $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; слѣд. $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$; а какъ найдено выше, что $yy + xx = aa$, то $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; вставивъ въ этомъ уравненїи на мѣсто x величину его $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, получу $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) = 2a\left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times [bb - (a - c)^2]$, потому что $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a - c)^2$; принимая $a - c$ за отдѣленное количество, можно заключить, что $bb - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; слѣд. $(BO)^2 = \frac{a}{c}(b + a - c)(b - a + c)$, что можно представить въ другомъ такомъ видѣ $(BO)^2 = \frac{a}{c}(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$. И такъ представивъ чрезъ $2s$ сумму трехъ боковъ, получу $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s - 2c)(2s - 2a) = 4\frac{a}{c}(s - c)(s - a)$. Естьли изъ точки C опустится на OB перпендикуляръ CI, то въ прямоугольникѣ CIO можно послать (Геом. 299) слѣдующую пропорцїю, CO : OI = R : син. OCI, то есть, $a : \frac{1}{2}BO = R :$ син. OCI; слѣд. $\frac{1}{2}BO = \frac{a \times \text{син. OCI}}{R}$, или $BO = \frac{2a \times \text{син. OCI}}{R}$, и $(BO)^2 = \frac{4a^2 \times (\text{син. OCI})^2}{R^2}$; сравнивъ напослѣдокъ двѣ найденныя величины $(BO)^2$, получу $\frac{4a^2}{R^2}$ (син.

$OCI)^2 = \frac{4a}{c}(s - c)(s - a)$, или по раздѣленіи на $4a$ и по уничтоженіи знаменателей ac (*син.* $OCI)^2 =$ $R^2 (s - c)(s - a)$; изъ сего уравненія выведу такую пропорцію $ac : (s - c)(s - a) = R^2 :$ (*син.* $OCI)^2$, которая покажетъ правило, какъ находить всякой уголъ въ прямолинейномъ треугольникѣ по тремъ извѣстнымъ его бокамъ. Правило сіе состоитъ въ слѣдующемъ.

Сложи всѣ три бока вмѣстѣ, и изъ половины суммы вычти порознь каждой изъ двухъ боковъ, заключающихъ искомой уголъ; отъ чего выдутъ два остатка; потомъ посылай такую пропорцію ... Какъ произведеніе двухъ боковъ, заключающихъ уголъ, содержится къ произведенію двухъ остатковъ, такъ квадратъ радіуса къ четвертому члену, тоесть, къ квадрату синуса половины искомаго угла.

Но производя правило сіе въ логариѳмахъ, поступай такъ:

Сложи всѣ три бока вмѣстѣ, и изъ половины суммы вычти порознь каждой изъ боковъ, заключающихъ искомой уголъ: чрезъ что получишь два остатка. Потомъ сложи логариѳмы сихъ двухъ остатковъ и Ариѳметическія дополненія логариѳмовъ двухъ боковъ, между которыми заключается искомой уголъ; половина суммы сихъ логариѳмовъ покажетъ логариѳмъ синуса половины искомаго угла.

Правило сіе сходствуетъ съ показаннымъ (Геом. 390) въ вопросѣ VI.

195. 3е. Изъ уравненія $yy + xx = aa$ можно вывести $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$, которое по вставкѣ величины x превратится въ $yy =$

$$\left(a + \frac{aa - bb + cc}{2c}\right)\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) = \ldots.$$

$$\left(\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) =$$

$$\left(\frac{(a + c)^2 - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb - (a - c)^2}{2c}\right) = \left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)$$

$\times \left(\frac{b+a-c)(b-a+c}{2c}\right)$; слѣд. $4ccyy = (a+c+b)$ $(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$, или $4ccyy$ $= (a+b+c)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)$ $(a+b+c-2a)$. И такъ представивъ чрезъ $2s$ сумму $a+b+c$ трехъ боковъ, получу $4ccyy = 2s.$ $(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)$, или $4ccyy = 16s.$ $(s-a)(s-b)(s-c)$; наконецъ по раздѣленіи на 16, по приведеніи и по извлеченіи квадратнаго корня выведу $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s.(s-a)(s-b)(s-c)]}$.

Но $\frac{cy}{2}$ или $\frac{AC \times BD}{2}$ представляетъ площадь треугольника ABC; слѣд. для сысканія площади какого нибудь треугольника по извѣстнымъ его бокамъ; *должно изъ половинной суммы вычесть порознь каждой бокъ; всѣ остатки умножить между собою и на половинную сумму; наконецъ изъ произведенія извлечь квадратной корень.*

196. 4е. Изъ экваціи $2cx - cc = aa - bb$ выходитъ $bb = aa + cc - 2cx$; но естьли перпендикуляръ упадетъ внѣ треугольника (*фиг.* 13), то оставивъ тѣжъ наименованія линеямъ, получу $yy + xx = aa$, и $yy + cc + 2cx + xx = bb$, потому что AD, которую прежде представляло количество $c - x$, здѣсь представляетъ количество $c + x$.

Естьли первое уравненіе вычту изъ втораго, то произойдетъ $cc + 2cx = bb - aa$, или $c(c+2x) = (b+a) \times (b-a)$, изъ котораго можно вывести такую пропорцію $c : b+a = b-a : c+2x$; а какъ $c + 2x$ равно $x + c + x$ и представляетъ CD + AD, то вывожу наконецъ AC : AB + BC = AB — BC : CD + AD такую пропорцію, которая сходствуетъ со второю частію доказаннаго (Геом. 306) предложенія.

197. 5е. Изъ этого же уравненія $cc + 2cx = bb - aa$ выходитъ $bb = aa + cc + 2cx$; почему сравнивъ сіе послѣднее съ $bb = aa + cc - 2cx$, которое относится къ *фигурѣ* 12, найдемъ, что квадратъ bb бока AB, лежащаго противъ остраго угла C состав-

дяетъ меньше суммы $aa + cc$ квадратовъ двухъ прочихъ боковъ, потому что онъ, какъ видѣть можно изъ самой экваціи, равняется той суммѣ безъ $2cx$. Напротивъ квадратъ bb бока AB противоположеннаго тупому углу (*фиг.* 13) равняется $aa + cc + 2cx$, то есть, бываетъ больше суммы квадратовъ двухъ прочихъ боковъ; слѣд. по симъ двумъ замѣчаніямъ можно, дѣлая выкладку угламъ какого нибудь треугольника посредствомъ боковъ его, узнавать, каковъ долженъ быть искомой уголъ, тупой или острой.

198. 6е. Два уравненія $bb = aa + cc - 2cx$ и $bb = aa + cc + 2cx$ подтверждаютъ изъясненное объ отрицательныхъ количествахъ. Ибо можно видѣть, что отрѣзокъ CD, смотря по положенію перпендикуляра BD (*фиг.* 12 и 13), какъ онъ упадаетъ внутри или внѣ треугольника, состоитъ изъ разныхъ боковъ; различіе сіе показывается въ означенныхъ уравненіяхъ противными знаками члена $2cx$. И такъ во всякой выкладкѣ, производимой для какого нибудь треугольника, должно во всѣхъ случаяхъ сходствующихъ со вторымъ, поставлять съ противными знаками всѣ тѣ части, которыя будутъ занимать противныя стороны на одной и той же линеѣ. А какъ отрѣзокъ CD не употребляется въ изысканіи угловъ и площади, то оба предложенія (194 и 195) приличествуютъ одинаково прямолинейнымъ треугольникамъ всякаго рода, какъ остроугольнымъ, такъ и тупоугольнымъ.

199. Хотя вообще легче и скорѣе можно выводить изъ Геометрическихъ задачь уравненія тому, кому болѣе извѣстно число свойствъ линей; однакожъ, поелику Алгебра сама преподаетъ средства находить оныя свойства, число Геометрическихъ предложеній настояще нужныхъ довольно ограничено. Сіи два, именно: *въ подобныхъ треугольникахъ сходственные бока бываютъ про-*

порціональны; *и въ прямоугольномъ треугольникѣ квадратъ гипотенузы равняется суммѣ квадратовъ двухъ боковъ, лежащихъ при прямомъ углѣ*, служатъ главнымъ основаніемъ Алгебраической приноровки къ Геометріи. Однако смотря по свойству вопросовъ, можно разнымъ образомъ употреблять сіи предложенія: это замѣтить не трудно было въ предыдущемъ примѣрѣ; ибо въ заключеніяхъ, выведенныхъ нами изъ его рѣшенія при выкладкѣ угла посредствомъ трехъ боковъ, догадка описывать дугу BO (*фиг.* 12), чтобъ опредѣлить хорду BO, и по половинѣ ея OI сыскать синусъ угла OCI, не такъ-то легко приходитъ на мысль. Этакой догадки требуютъ и многія другія задачи; ибо для рѣшенія ихъ нужно иногда продолжать нѣкоторыя изъ линей до пересѣченія ихъ съ другими, иногда проводить къ нимъ параллельныя или такія, которыя бы составляли съ ними извѣстной уголъ. Словомъ, знатокъ въ примѣненіи Алгебры къ Геометріи и ко всему другому долженъ имѣть разборъ въ употребляемыхъ средствахъ; но какъ разборъ сей снискивается по большой части практикою, то мы означенныя наблюденія свои постараемся объяснить разными примѣрами.

200. Предложимъ теперь такой вопросъ: *Изъ точки* A (фиг. 14), *коей положеніе извѣстно въ разсужденіи двухъ линей* HD *и* DI, *составляющихъ извѣстной уголъ* HDI, *провести прямую линею* AEG *такъ, чтобъ произошелъ треугольникъ* EDG *опредѣленной площади, то есть, равной извѣстному квадрату* cc.

Изъ точки A проведи линею AB, параллельную съ DH, и линею AC перпендикулярную къ продолженной DG; изъ точки E, гдѣ линея AEG должна пересѣчь DH, вообрази перпендикуляръ EF.

Естьли будутъ извѣстны EF и DG, то умноживъ ихъ между собою и взявъ изъ произведенія половину, получишь площадь треугольника EDG, которая должна равняться cc.

И такъ положимъ DG $= x$; чтожъ касается до EF, то посмотримъ, не можно ли опредѣлить величину сей линеи по x, или по даннымъ частямъ въ вопросѣ.

Поелику допустили мы, что положеніе точки A извѣстно, слѣд. должно почитать также извѣстнымъ разстояніе BD, по которому проходитъ параллельная AB, и раз-

стояніе AC отъ точки A до продолженной линеи DG. И такъ представивъ BD чрезъ a, а AC чрезъ b, получимъ въ подобныхъ треугольникахъ ABG, EDG пропорцію BG : DG = AG : EG, и въ подобныхъ треугольникахъ ACG, EFG другую слѣдующую AG : EG = AC : EF; слѣд. BG : DG = AC : EF, то есть, $a + x : x = b : EF$; почему EF = $\frac{bx}{a + x}$. Но какъ площадь треугольника EDG должна равняться квадрату cc, то EF $\times$ $\frac{DG}{2}$ или $\frac{bx}{a + x} \times \frac{x}{2} = cc$, то есть $\frac{bxx}{2a + 2x} = cc$, или по уничтоженіи знаменателя $bxx = 2acc + 2ccx$.

Разрѣшивъ сію эквацію по правиламъ (81 и слѣд.) нахожу двѣ слѣдующія величины $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b})}$; вторая изъ нихъ съ знакомъ — не годится для настоящаго вопроса.

Производя конструкцію для первой величины, представляю ее въ такомъ видѣ $x = \frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} + 2a)\frac{cc}{b}]}$. Провожу неопредѣленную линею PQ (*фиг.* 15), ставлю изъ какой нибудь ея точки C перпендикуляръ AC = b, и кладу на CA и CP линеи CO, CM, равныя боку c даннаго квадрата; провожу

AM и къ ней изъ точки O параллельную ON, которая опредѣляетъ чрезъ CN величину количества $\frac{cc}{b}$; потому что въ подобныхъ треугольникахъ ACM, OCN можно послать AC : OC = CM : CN, то есть, $b : c = c$: CN; и слѣд. CN $= \frac{cc}{b}$. По опредѣленіи сего, величина x превращается въ x = CN + $\sqrt{}$ [(CN + $2a$) × CN]; но $\sqrt{}$ [(CN + $2a$) × CN] представляетъ (187) среднюю пропорціональную линею между CN и CN + $2a$; почему стоитъ теперь опредѣлить сію среднюю пропорціональную линею и сложить ее съ CN. Кладу на продолженіи NC линею CQ = $2a$, и на всей NQ описываю полкруга NVQ, которой пересѣкаетъ въ точкѣ V продолженіе CA; кладу изъ N въ P хорду NV, и получаю CP за величину x; поелику NV есть (Геом. 112) средняя пропорціональная между NC и NQ, то есть, между CN и CN + $2a$; слѣд. NV или PN = $\sqrt{}$ [(CN + $2a$) × CN]; слѣд. CP = CN + PN = CN + $\sqrt{}$ [(CN + $2a$) × CN] = x. Естьли по перенесеніи CP изъ D въ G (*фиг.* 14) проведу отъ точки G къ A прямую линею AG, то тѣмъ опредѣлю треугольникъ EDG, котораго площадь будетъ равна квадрату cc.

201. Что принадлежитъ до значенія второй величины x, именно $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$, то должно для понятія онаго примѣтить, что по вопросу неизвѣстно, о какомъ именно углѣ дѣло идетъ, объ углѣ ли EDG (*фиг.* 14) или о равномъ ему E′DG′, которой состоитъ изъ продолженія линей GD, ED; данныя количества какъ для сего угла, такъ и для другаго служатъ одинаково, и потому второе рѣшеніе должно относиться къ такому вопросу, которымъ требуется сдѣлать въ углѣ E′DG′ тоже самое, что мы сдѣлали выше въ углѣ EDG. Почему представивъ DG′ чрезъ x и удержавъ для прочихъ количествъ прежнія наименованія, выведу въ подобныхъ треугольникахъ ABG′, E′DG′ по причинѣ параллельныхъ AB и DE′, такую пропорцію BG′ : DG′ = AG′ : G′E′; потомъ опустивъ перпендикуляръ E′F′, получу въ подобныхъ треугольникахъ ACG′, E′F′G′ другую такую AG′ : G′E′ = AC : F′E′; слѣд. BG′ : DG = AC : F′E′, то есть, $a - x : x = b$: F′E′; почему F′E′ = $\frac{bx}{a - x}$; а какъ площадь треугольника G′E′D должна равняться квадрату cc, то $\frac{bx}{a - x} \times \frac{x}{2} = cc$; изъ сего уравненія вывожу $bxx = 2acc - 2ccx$, и напослѣдокъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ величины x, которыя во всемъ, кромѣ знаковъ, сходствуютъ съ прежними, какъ то и въ самомъ дѣлѣ должно произойти, потому что количество x принимается здѣсь противно прежнему случаю. Новое подтвержденіе на отрицательныя количества, которыя, какъ мы неоднократно напоминали, должны быть принимаемы въ противномъ смыслѣ.

Конструкція, сдѣланная въ предыдущемъ случаѣ, служитъ и здѣсь съ одною только тою перемѣною, что NV (*фиг.* 15) должно перенести изъ N въ K къ сторонѣ Q; почему величина x, которую прежде представляла CP, будетъ здѣсь состоять изъ CK. Въ самомъ дѣлѣ величина x, приличная для настоящаго случая, изображается чрезъ $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$,

или чрезъ $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{[(\frac{cc}{b} + 2a) \times \frac{cc}{b}]}$, то есть, $x = - CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; а какъ $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, то $x = - CN + NV = - CN + NK = CK$. И такъ по перенесенїи CK изъ D въ G′ (*Фиг.* 14) и по проведенїи чрезъ точку G′ и A прямой линеи AG′E′, произойдетъ треугольникъ G′DE′ равный квадрату cc, то есть, такой, которой сходствуетъ со вторымъ рѣшенїемъ вопроса.

202. Въ обоихъ предыдущихъ случаяхъ предполагали мы, что точка A (*Фиг.* 14.) находится сверху линеи BG; теперь естьли допустимъ ее снизу (*Фиг.* 16); то количество b, или линея AC сдѣлается отрицательнымъ, и потому первыя двѣ величины x изобразятся чрезъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b})}$, или $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$. Отсюда явствуетъ, что задача становится возможною тогда только, когда $2a$ будетъ меньше $\frac{cc}{b}$; но естьли оно будетъ больше, то количество съ радикальнымъ знакомъ сдѣлается отрицательнымъ, и слѣд. (85) величина x выходитъ или умственною или несообразною. Когда $2a$ меньше $\frac{cc}{b}$, тогда обѣ величины x будутъ отрицательными, и слѣд. задача сдѣлается невозможною въ разсужденїи угла HDI, но въ разсужденїи равнаго ему угла E′DG′ она будетъ имѣть два рѣшенїя. Для показанїя сихъ рѣшенїй сдѣлай конструкцїи для обѣихъ величинъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{[(\frac{cc}{b} - 2a) \times \frac{cc}{b}]}$ слѣдующимъ образомъ. Опредѣливши по вышеозначенному способу величину CN количества $\frac{cc}{b}$, сдѣлай (*Фиг.* 17) $NQ = 2a$; потомъ описавъ на сей линеѣ какъ на дїаметрѣ полкруга NVQ, проведи тангенсъ CV; перенеси CV изъ C въ P къ сторонѣ N, и изъ C въ K противно предыдущему случаю; тогда NP и NK будутъ служить двумя величинами x. Наконецъ по-

ложивъ (*фиг.* 16) NP и NK изъ D въ G, и изъ D въ G', проведи чрезъ точку A, и чрезъ точки G и G' прямыя линеи EG и E'G'; отъ чего произойдутъ два треугольника EDG и E'DG', изъ которыхъ каждой будетъ равенъ квадрату *cc*. Дабы увѣриться въ томъ, что NP и NK (*фиг.* 17) служатъ величинами x, то должно припомнить, что CV (*Геом.* 124) представляя среднюю пропорцїональную линею между CN и CQ, будетъ $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, или (по вставкѣ величинъ сихъ линей) CV или CP или CK $= \ldots$ $\sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$; слѣд. $NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$, и $NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \ldots \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$; а какъ количества сїи, по перемѣнѣ ихъ знаковъ, сходствуютъ въ точности съ величинами x, то онѣ, и по перенесенїи ихъ изъ D въ G (*фиг.* 16), будутъ также представлять величины x.

203. Когда точка A (*фиг.* 18) будетъ заключаться въ самомъ углѣ HDI, тогда BD простираясь въ противную сторону въ разсужденїи предыдущихъ случаевъ, сдѣлаетъ a отрицательнымъ количествомъ; и потому двѣ начальныя величины x превратятся въ $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$, которыя по перемѣнѣ ихъ знаковъ будутъ одинаковы съ сочиненными предъ симъ. И такъ по совершенїи такой же конструкцїи, какая показана (*фиг.* 17), должно перенести величины NP и NK количества x, изъ D (*фиг.* 18) къ сторонѣ I; отъ чего произойдутъ два треугольника DEG, DE'G', изъ которыхъ каждой рѣшитъ вопросъ.

204. Наконецъ точка A (*Фиг.* 19.) можетъ лежать ниже BD въ углѣ BDE'. Въ такомъ случаѣ оба количества a и b будутъ отрицательными; и слѣд. величины x изобразятся чрезъ $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, которыя имѣютъ совсѣмъ противные знаки съ первыми.

Конструкцїя вЪ такомЪ положенїи служитЪ сдѣланная (*фиг.* 15). Только СК представляетЪ здѣсь положительную величину x, а СР отрицательную; первую должно перенести (*фиг.* 19) изЪ D вЪ G кЪ сторонѣ B, а другую напротивЪ изЪ D вЪ G'.

Мы постарались изЪяснить столько разныхЪ случаевЪ для настоящаго рѣшенїя единственно для того, чтобЪ показать, какимЪ образомЪ они заключаются всѣ вЪ одномЪ уравненїи, какимЪ образомЪ они выводятся посредствомЪ перемѣны знаковЪ, и какимЪ образомЪ противныя положенїя линей означаются противностїю знаковЪ, и на оборотЪ. Теперь остается показать нѣкоторыя еще употребленїя тогожЪ рѣшенїя.

205. Слѣдующїй вопросЪ: *изЪ данной точки* (фиг. 20) *внѣ треугольника или внутри треугольника* DHI, *провести линею* AF *такЪ, чтобЪ она раздѣлила сей треугольникЪ на двѣ части* EDF, EFIH, *которыя бы содержались между собою какЪ* $m : n$, можно рѣшить такимЪ же образомЪ, какЪ и предыдущїй. Поелику площадь треугольника DHI дана, и притомЪ извѣстно, какую часть треугольникЪ DEF долженЪ занимать вЪ треугольникѣ DHI, то сдѣлаю такую посылку $m + n : m =$ площадь треугольника DHI кЪ четвертому члену, которой долженЪ представить площадь треугольника DEF. Но можно сдѣлать всегда квадратЪ cc равной площади треугольника DEF (185); слѣд. вЪ настоящемЪ вопросѣ требуется тожЪ самое, что и вЪ предыдущемЪ, именно провести чрезЪ точку A такую линею AEF, которая бы сдѣлала сЪ боками DH, DI треугольникЪ DEF, равный квадрату cc.

206. Можно рѣшить тѣмЪ же способомЪ и слѣдующїй другой вопросЪ: *раздѣлить всякую прямолинейную фигуру* BKHDC (фиг. 21) *линеею, проведенною изЪ данной точки* A, *на двѣ части* BCFE и EFDHK *вЪ извѣстномЪ содержанїи.* Поелику вЪ данной фигурѣ BCDHK всѣ углы и всѣ бока извѣстны, то безЪ всякаго труда можно опредѣлить треугольникЪ BLC, которой составляютЪ продолженные бока KB и DC, потому что вЪ этомЪ треугольникѣ бокЪ

BC и два угла LBC, LCB дополненія данныхъ угловъ CBK и BCF извѣстны; и такъ площадь треугольника LEC можно почитать теперь за извѣстную, а какъ площадь EBCF должна занимать опредѣленную часть всей фигуры, то и треугольникъ LEF будетъ также извѣстенъ; слѣд. для рѣшенія предложеннаго вопроса стоитъ только провести такую прямую линею AEF, которая бы составляла съ угломъ KLD треугольникъ, равный извѣстному квадрату. Наконецъ явствуетъ изъ сего, какимъ образомъ должно поступать при раздѣленіи сей фигуры на большее число частей, коихъ содержаніе будетъ дано.

207. Нужно еще замѣтить здѣсь, что естьли нѣкоторыя изъ данныхъ количествъ уравненія, служащаго къ рѣшенію вопроса; суть таковы, что и по перемѣнѣ въ нихъ знаковъ сама эквація не перемѣняется; или естьли сдѣланная перемѣна въ положеніи искомой линеи или линей не перемѣняетъ положенія и величины въ данныхъ линеяхъ; то между разными величинами x, когда ихъ будетъ много въ уравненіи, найдется всегда одна такая, которая разрѣшитъ приличнымъ образомъ случай, означенный перемѣною.

На примѣръ въ трактуемой выше эквацїи видѣли мы, что одна изъ величинъ x служила рѣшеніемъ вопросу на такой случай, когда линея AEG (фиг. 14) должна проходить чрезъ уголъ HDI, а другая на такой, когда таже линея должна проходить чрезъ противоположенной ему.

208. Положимъ, что *требуется найти на направленіи данной линеи* AB (фиг. 22) *такую точку* C, *которой бы*

разстояніе отъ A *представило среднюю пропорціональную между разстояніемъ ся отъ* B *и цѣлою линеею* AB.

Представь данную линею AB чрезъ a, а искомое разстояніе AC чрезъ x: послѣ чего BC сдѣлается равна $a - x$. Но какъ требуется, чтобъ $AB : AC = AC : CB$ или $a : x = x : a - x$, то по умноженіи крайнихъ и среднихъ членовъ въ сей пропорціи произойдетъ $xx = aa - ax$, или $xx + ax = aa$ эквація второй степени, которую рѣшивъ надлежащимъ образомъ, получу $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Для сочиненія первой величины $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, поставь (187) изъ точки B перпендикуляръ $BD = \frac{1}{2}a$ и проведи линею AD; отъ чего произойдетъ $AD = \sqrt{[(BD)^2 + (AB)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; вычти изъ сей линеи количество $\frac{1}{2}a$, а сіе сдѣлай перенесши DB изъ D въ O; тогда AO будетъ равна $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, то есть, количеству x; напослѣдокъ перенеси AO изъ A къ B; точка C, гдѣ та линея кончится, будетъ желаемая.

Что касается до второй величины x, именно $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, то положи BD изъ D въ O' на продолженіи AD; отъ чего AO' сдѣлается $= \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; а какъ это же количество, взятое въ отрицательномъ смыслѣ, представитъ величину

x, то перенеси AO′ изЪ A вЪ C′ на продолженной AB вЪ противную сторону, и тогда получишь вторую точку C′ такую, которой разстояніе до A будетЪ служить также среднею пропорціональною линеею между C′B и AB.

ЗамѢтимЪ, что вопросЪ сей заключаетЪ вЪ себѢ такой, которымЪ требуется *раздѢлить данную линею AB по наружной посредственной пропорціи*; почему сдѢланная теперь конструкція сходствуетЪ во всемЪ сЪ показанною вЪ Геометріи (125), которую тамЪ предполагали мы уже найденною.

209. Разсматривая дорогу, которою доходили мы до рѢшенія предыдущихЪ вопросовЪ, не трудно увидѢть, что мы избирали вездѢ неизвѢстнымЪ количествомЪ такую линею, которая, какЪ скоро становится извѢстною, опредѢляетЪ и всѢ прочія; также должно поступать и впередЪ. Но какЪ между многими линеями, имѢющими свойство опредѢлять всѢ прочія, находятся не рѢдко такія, которыя выводятЪ уравненія сложнѢе и збивчивѢе другихЪ; то, чтобЪ сдѢлать выборЪ ихЪ надежнѢе, предпишемЪ слѢдующее правило.

210. *Естьли между линеями или количествами, изЪ которыхЪ каждое будучи взято за неизвѢстное, можетЪ опредѢлить всѢ прочія количества, найдутся два такія, которыя служатЪ одинакимЪ образомЪ, и выводятЪ сходныя эквации, кромѢ знаковЪ; то не должно*

употреблять ни того, ни другаго, но избрать неизвѣстнымъ такое, которое бы зависѣло отъ нихъ обѣихъ; на примѣръ, можно брать за неизвѣстное полсуммы ихъ или полразности, или среднее пропорціональное количество, или и проч.; употребляя сіи послѣднія количества, получишь экваціи проще и легче тѣхъ, какія могутъ выпти изъ вышеобъявленныхъ.

Слѣдующій вопросъ увѣритъ насъ въ томъ самымъ дѣломъ.

211. *Изъ точки* D (фиг. 23), *лежащей въ прямомъ углѣ* IAE *и равно отстоящей отъ боковъ* IA *и* AE, *провести прямую линею* DB *такъ, чтобъ часть* CB, *заключающаяся въ прямомъ углѣ* EAB *была равна данной линеѣ.*

Опустивъ перпендикуляры DE, DI, могу взять безъ различія неизвѣстнымъ количествомъ CE или AB, AC или IB, CD или DB. Естьли возьму CE неизвѣстнымъ, то назвавъ количество сіе x, и означивъ чрезъ a каждую изъ линей равныхъ DE, DI, которыя предполагаются извѣстными, а чрезъ c данную линею, которой BC должна быть

равна, получу AC $=$ AE — CE $= a - x$; вЪ подобныхЪ треугольникахЪ DEC, CAB найду AB слѣдующею посылкою CE : DE $=$ AC : AB, то есть, $x : a = a - x$: AB, и слѣд. AB $= \frac{aa - ax}{x}$. По свойству прямоугольнаго треугольника ACB (Геом. 164) получу $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$; вставивЪ вЪ мѣсто сихЪ линей Алгебраическія величины, выведу $(a - x)^2 + \frac{(aa - ax)^2}{x}$ $= cc$, или $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx}$ $= cc$, или по уничтоженіи знаменателя, по переставкѣ членовЪ и по приведеніи $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = o$ уравненіе четвертой степени, которое не такЪ-то легко можно употребить кЪ рѣшенію предложеннаго вопроса.

Естьли вЪ мѣсто CE возьму неизвѣстнымЪ IB, то назвавЪ IB x, и поступая по предыдущему образцу рѣшенія, получу эквацію, которая будетЪ разниться сЪ найденною вЪ томЪ только, что заключаетЪ вЪ себѣ $x - a$ вмѣсто $a - x$, но вЪ прочемЪ совершенно такая же; ибо количества сіи вЪ той и другой должны быть возведены во вторую степень. ТакимЪ же образомЪ уравненіе, для котораго AB взята будетЪ за неизвѣстное количество, ни вЪ чемЪ, кромѣ

знаковъ не будетъ отличаться отъ того, гдѣ AC возмешь неизвѣстнымъ. Что принадлежитъ до DB и DC, то эквацiи ихъ будутъ также, кромѣ знаковъ, во всемъ сходствовать между собою; и такъ не надобно брать никакой изъ этихъ линей.

Напротивъ естьли возмемъ за неизвѣстное сумму двухъ линей DB и DC, и представимъ ее чрезъ $2x$, то получимъ (*Геом.* 305) $DB = x + \frac{1}{2}c$, а $DC = x - \frac{1}{2}c$; притомъ же по причинѣ параллельныхъ DI и CA можно сыскать AB и AC слѣдующими двумя посылками $DC : CB = IA$ или $DE : AB$, и $DB : CB = DI : AC$; то есть, $x - \frac{1}{2}c : c = a : AB$, и $x + \frac{1}{2}c : c = a : AC$; слѣд. $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$ и $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; а какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ CAB (*Геом.* 164) $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, то по вставкѣ величины сихъ линей получаю... $\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc$, или по уничтоженiи дробей и по раздѣленiи на cc, $a^2 (x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2 (x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2 (x - \frac{1}{2}c)^2$, по совершенiи означенныхъ дѣйствiй, по переставкѣ членовъ и по приведенiи получаю наконецъ $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$ хотя уравненiе также четвертой степени, но такое, которое гораздо

легче можно рѣшить предыдущаго, потому что оно рѣшится (141) на подобіе уравненій второй степени.

Можно также вывести довольно легкія и простыя уравненія, употребивши два неизвѣстныхъ, изъ которыхъ бы одно представляло сумму двухъ линей AB и AC, а другое ихъ разность: на примѣръ естьли сдѣлаю $AB + AC = 2x$, а $AB - AC = 2y$, то произойдетъ $AB = x + y$, а $AC = x - y$; въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC получаю $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, а въ треугольникахъ ABC, IBD подобныхъ между собою $AB : AC = IB : ID$; отсюда выходятъ два уравненія, по которымъ безъ всякаго труда опредѣлены будутъ x и y, потому что естьли изъ перваго выведешь величину xx, и вставишь ее во второмъ, то получишь для величины y эквацію второй степени. Но мы оставимъ начинающимъ докончать эту выкладку, и приступимъ къ прежнему уравненію.

Въ сходственность (141) выходитъ $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; по извлеченіи квадратнаго корня $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm \sqrt{(aacc + a^4)}$, и слѣд. $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}$; нако-

нецъ по новомъ извлеченіи квадратнаго корня получаю $x = \pm \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}]}$, или $x = \pm \sqrt{[(\frac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{(cc + aa)}]}$.

Изъ четырехъ величинъ x, какія представляетъ двоякое соединеніе знаковъ $\pm$ одна только годится для настоящаго вопроса, именно $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}]}$.

Величина $x = + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + aa)}]}$. разрѣшаетъ тотъ же вопросъ, но въ такомъ случаѣ, когда потребуется, чтобъ линея CB находилась въ одномъ углѣ съ точкою D (*Смот. фиг.* 24); тогда x представляетъ уже не половинную сумму, но половинную разность линей DB и DC; въ этомъ тотчасъ можно увѣриться, изобразивши сію разность чрезъ $2x$ и рѣшивши задачу по вышеозначенному образцу; ибо BD въ семъ случаѣ будетъ $= \frac{1}{2}c + x$, CD $= \frac{1}{2}c - x$; по причинѣ параллельныхъ DI и CA можно послать DB : CB = DI : CA и DC : CB = AI : AB, или $\frac{1}{2}c + x : c = a : CA$, и $\frac{1}{2}c - x : c = a : AB$; слѣд. $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, а $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; въ прямоугольномъ треугольникѣ CAB получимъ . . . $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$; наконецъ по со-

вершенiи означенныхЪ дѣйствiй будемЪ имѣть $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$ точно такое же уравненiе, какое мы прежде нашли для суммы двухЪ линей BD и CD (*фиг.* 23). А какЪ одна и таже эквацiя рѣшитЪ вопросЪ на два случая, то должно, чтобЪ одинЪ изЪ корней ея представлялЪ сумму, а другой разность.

Что касается до двухЪ прочихЪ корней, то для свѣденiя тѣхЪ случаевЪ, кЪ коимЪ они относятся, должно примѣтить, что даннымЪ вопросомЪ, или лучше выведеннымЪ изЪ него уравненiемЪ не опредѣляется точнаго положенiя точки D, то есть, находится ли эта точка снизу AI (*фиг.* 23) и влѣво отЪ AE, или выше первой и вправо отЪ второй, какЪ то видѣть можно изЪ положенiя ея вЪ разсужденiи A'I' и A'E'; а какЪ вЪ послѣднемЪ положенiи точки D количество a упадаетЪ совсѣмЪ вЪ противныя стороны и становится отрицательнымЪ, то для приличнаго рѣшенiя настоящихЪ случаевЪ должно вЪ найденномЪ уравненiи $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2$ и проч. поставить $-a$ вмѣсто $+a$. Но поелику эквацiя послѣ сего дѣйствiя не перемѣняется, то она должна рѣшить два новые случая; почему изЪ двухЪ остальныхЪ величинЪ x одна должна представлять сумму линей DB' и DC' (*фиг.* 23) а другая разность ихЪ (*фиг.* 24).

Производство конструкцiй для первыхЪ двухЪ величинЪ состоитЪ вЪ слѣдующемЪ: положи на продолженiи EA (*фиг* 23 и 24) часть $AN = c$, и по проведенiи IN перенеси ее на продолженiи DI изЪ I вЪ K; на DK, какЪ на дiаметрЪ, опиши полкруга KLD, пересѣкающiйся вЪ L продолженiемЪ AI.

Изъ середины H линеи AN проведи IH и положи ей равную линею изъ I въ M (*фиг.* 23); линея LM представитъ первую величину x; но въ *фигурѣ* 24, изъ точки L какъ изъ центра и радіусомъ равнымъ IH пересѣки малою дугою линею IK въ точкѣ M, IM будетъ служить второю величиною x; а какъ $BD = x + \frac{1}{2}c$, то для *фигуры* 23 получишь $BD = LM + AH$, а для *фигуры* 24 $BD = IM + AH$; напослѣдокъ изъ точки D какъ изъ центра и радіусомъ BD, которой сдѣлался теперь опредѣленнымъ, пересѣки дугою продолженіе линеи AI въ точкѣ B, отъ чего произойдетъ искомая линея BD. Ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ IAN (*фиг.* 23 и 24) IN или $IK = \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(aa + cc)}$, а поелику LI есть средняя пропорціональная между DI и IK, то $LI^2 = DI \times IK = a\sqrt{(aa + cc)}$; притомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ IAH гипотенуза IH или $IM = \sqrt{(IA^2 + AH^2)} = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}cc)}$; слѣд. въ прямоугольномъ треугольникѣ LIM (*фиг.* 23) $LM = \sqrt{(MI^2 + IL^2)} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{(aa + cc)}]} = x$, но (*фиг.* 24) $IM = \sqrt{(LM^2 - IL^2)} = \sqrt{[(aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}]} = x$.

Должно замѣтить здѣсь, что линея IH (фиг. 24) въ конструкціи послѣдней величины x предполагается больше или по крайней мѣрѣ равна LI. Естьлижъ она будетъ меньше, то задача сдѣлается невозможною. Ибо естьли въ величинѣ $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}]}$ количество $aa + \frac{1}{4}cc$, то есть $(IH)^2$ будетъ меньше $a\sqrt{(aa + cc)}$, то есть, $(IL)^2$, въ такомъ случаѣ радикальное количество сдѣлается отрицательнымъ, и слѣд. величина x превратится въ мнимую.

212. Принимая за неизвѣстное количество сумму линей BD и DC (фиг. 23) или разность ихъ (фиг. 24), вывели мы уравненіе проще того, какое произходитъ отъ принятія CE, или AC, или AB, или IB по той причинѣ, что отношеніе линей DB и DC къ линеямъ IB и AB подобно отношенію, какое имѣютъ тѣжъ линеи DB и DC къ линеямъ AC и CE; то есть, онѣ могутъ быть опредѣлены сходными дѣйствіями чрезъ допущеніе какъ IB и AB, такъ AC и CE.

Поелику вообще уравненіе должно заключать въ себѣ всѣ различныя отношенія искомаго количества къ тѣмъ, отъ которыхъ оно зависитъ; то уравненіе бываетъ тѣмъ

проще, чѣмъ неизвѣстное имѣетъ меньше отношеній къ другимъ.

213. Положимъ, что ABED (*фиг.* 25) представляетъ шаръ, произшедшій изъ обращенія полкруга ABE около діаметра AE. Круговой секторъ ABC производитъ при семъ обращеніи сферической секторъ, состоящій изъ сферическаго сегмента и конуса: сегментъ раждается отъ обращенія половины круговаго сегмента ABP, а конусъ отъ обращенія прямоугольнаго треугольника BPC. *Спрашивается, въ какомъ мѣстѣ сферической сегментъ и конусъ будутъ равны между собою?*

Для рѣшенія сего вопроса надлежитъ припомнить (*Геом.* 247), что сферической секторъ равенъ произведенію площади выпуклаго круга BAD на треть радіуса AC. Площадь же сего круга находится (*Геом.* 226) умноженіемъ окружности ABED на высоту AP. И такъ представивъ содержаніе радіуса круга къ окружности чрезъ $r : c$, и положивъ притомъ AC $= a$, AP $= x$, получимъ окружность ABED чрезъ слѣдующую пропорцію $r : c = a :$ ABED; слѣд. окружность ABDE будетъ состоять изъ $\frac{ca}{r}$, площадь выпукла-

го круга изъ $\frac{cax}{r}$, а толщина сектора изъ $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3} a$ или изъ $\frac{caax}{3r}$.

Для опредѣленія толщины конуса должно умножить площадь круга, которой служитъ ему основаніемъ, то есть, площадь круга, имѣющаго полупоперешникомъ BP, на треть высоты CP; но поелику $CP = AC - AP = a - x$ и $CB = a$, то въ прямоугольномъ треугольникѣ BPC получимъ $BP = \sqrt{(CB^2 - CP^2)} = \sqrt{(aa - aa + 2ax - xx)} = \sqrt{(2ax - xx)}$; потомъ сыскавъ окружность круга, имѣющаго радіусомъ BP, по посылкѣ $r : c = \sqrt{(2ax - xx)}$ къ четвертому члену, которой будетъ $c\sqrt{\frac{(2ax - xx)}{r}}$; умноживъ сію окружность на половину радіуса $\sqrt{(2ax - xx)}$, получимъ $c . \frac{(2ax - xx)}{2r}$ количество, представляющее площадь основанія конуса; умноживъ сію площадь на треть высоты CP, то есть на $\frac{a - x}{3}$, опредѣлимъ толщину конуса чрезъ $\frac{c . (2ax - xx)}{2r} \times \frac{a - x}{3}$; а какъ сегментъ и конусъ предполагаются въ требованіи равны между собою, то секторъ составляя сумму обоихъ долженъ быть вдвое больше каждаго изъ тѣхъ тѣлъ, и слѣд.

$\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a - x}{3}$, или по уничтоженіи 2 общаго фактора вЪ числителѢ и знаменателѢ $\frac{caax}{3r} = \frac{c.(2ax - xx).(a - x)}{3r}$. Это уравненіе должно рѢшить вопросЪ. Для приведенія его вЪ простѢйшій видЪ уничтожаю $3r$ общаго дѢлителя и cx общаго множителя вЪ обѢихЪ частяхЪ, отЪ чего произходитЪ $aa = (2a - x).(a - x)$, или $xx - 3ax = - aa$; отсюда по правиламЪ перваго отдѢленія получаю $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$. Но изЪ двухЪ сихЪ рѢшеній одно только $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ годится, потому что величина $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ превышая $2a$, то есть, будучи больше цѢлаго діаметра, не можетЪ относиться кЪ шару.

ЧтобЪ сдѢлать конструкцію по рѢшенію $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, то перемѢни напередЪ его вЪ слѢдующій видЪ $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; потомЪ взявши AM $= \frac{3}{2}a$, опиши на AM, какЪ на діаметрѢ полкруга AOM; положи изЪ A вЪ O хорду AO $= a$ и проведи OM, которую перенеси изЪ M вЪ P кЪ сторонѢ A; точка P, гдѢ кончится сія линея, опредѢлитЪ высоту AP или x; ибо вЪ прямоугольномЪ треугольникѢ AOM получимЪ OM или PM $= \sqrt{(AM^2 - AO^2)}$

$= \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; слѣд. AP = AM – PM $= \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)} = x$.

Что принадлежитъ до втораго рѣшенія $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, то оно, какъ сказали мы уже выше, не годится для настоящаго вопроса, но относится равно какъ и первое къ другому отвлеченному вопросу такому, какой можно вывести изъ чтенія эквацій $xx - 3ax = -aa$, или $3ax - xx = aa$; именно *на извѣстной линеѣ* AN (фиг. 26), *которая раздѣлена на три равныя части въ точкахъ* B *и* D *найти такую точку* P, *чтобъ часть* AD *была среднею пропорціональною между растояніемъ точки* P *отъ концовъ* A *и* N. Въ самомъ дѣлѣ представивъ треть AD данной линеи AN чрезъ a, и AP чрезъ x, получимъ PN $= 3a - x$; притомъ изъ предположенныхъ въ вопросѣ условій выведемъ слѣдующую пропорцію $x : a = a : 3a - x$, а отсюда такую эквацію $3ax - xx = aa$, для которой служатъ двумя корнями тѣжъ $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, какіе найдены выше. Конструкція для обоихъ остается предыдущая, кромѣ того только, что для втораго корня, именно для $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, должно перенести MO изъ M въ P′ къ сторонѣ

N, и въ такомъ случаѣ AP и AP′ будутъ представлять величины x.

О нѣкоторыхъ другихъ Примѣненіяхъ Алгебры къ разнымъ предметамъ.

214. Поелику Геометрическія тѣла встрѣчаются часто въ задачахъ, особенно въ Физикоматематическихъ; и для того нужно познакомиться намъ теперь съ Алгебраическими изображеніями какъ ихъ цѣлости, такъ и частей. Это не только будетъ полезно въ послѣдствіи сего курса, но и еще покажетъ намъ, какъ посредствомъ Алгебры сравнивая извѣстныя тѣла, можно находить мѣру для другихъ, которыя имѣютъ къ нимъ отношеніе.

Естьли представимъ вообще чрезъ $r : c$ содержаніе радіуса къ окружности круга (содержаніе, какое извѣстно (*Геом.* 146) съ довольною точностію для практики); тогда окружность всякаго другаго круга, коему радіусомъ служитъ a, становится $\frac{ca}{r}$, а площадь $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2} a$ или $\frac{ca^2}{2r}$.

Изъ сего явствуетъ, что площади круговъ содержатся между собою, какъ квад-

раты ихъ радіусовъ; ибо $\frac{c}{2r}$ остается одинакой величины, но $\frac{ca^2}{2r}$ возрастаетъ пропорціонально a^2.

Естьли представимъ чрезъ h высоту цилиндра, котораго радіусомъ въ основаніи служитъ a, то получимъ (*Геом.* 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ за толщину его, по той же причинѣ получимъ $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$ за толщину другаго цилиндра, коего высота h' а полупоперешникъ основанія a'; и такъ толщины сихъ двухъ цилиндровъ будутъ содержаться между собою какъ $\frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$, или $a^2h : a'^2h'$ по уничтоженіи общаго фактора $\frac{c}{2r}$; то есть, толщины цилиндровъ находятся между собою какъ произведенія высотъ ихъ на квадраты радіусовъ основанія ихъ. Естьли высоты пропорціональны полупоперешникамъ основаній, то выходитъ $h : h' = a : a'$, и слѣд. $h' = \frac{ha'}{a}$; содержаніе $a^2h : a'^2h'$ становится въ такомъ случаѣ $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$, или (по уничтоженіи общаго фактора h и по умноженіи на a) $a^3 : a'^3$; то есть, толщины цилиндровъ содержатся между собою, какъ кубы полупоперешниковъ основанія ихъ.

Вообще мѣра поверхностей состоитъ, какъ мы то видѣли въ Геометріи, изъ произведенія двухъ протяженій, а мѣра тѣлъ изъ произведенія трехъ протяженій; слѣд. естьли протяженія двухъ тѣлъ или двухъ поверхностей будутъ находиться между собою въ одинакомъ содержаніи, то площади ихъ содержатся въ такомъ случаѣ, какъ квадраты, а тѣла, какъ кубы сходственныхъ протяженій. Изъ сего заключимъ, что естьли два какія нибудь количества одного свойства будутъ изображены произведеніемъ произвольнаго числа факторовъ, и когда притомъ каждой факторъ одного количества къ каждому фактору другаго содержится одинаково, то оба такія количества будутъ содержаться между собою, какъ сходственные ихъ факторы, возведенные въ такую степень, сколько всѣхъ ихъ находится въ каждомъ количествѣ.

На примѣръ естьли одно количество будетъ изображено чрезъ $abcd$, а другое чрезъ $a'b'c'd'$, то сіи количества должны содержаться между собою $= abcd : a'b'c'd'$; естьлижъ притомъ будетъ доказано, что $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$, то изъ сихъ содержаній можно вывести такія уравненія $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, и слѣд. со-

держаніе $abcd : a'b'c'd'$ превратится послѣ сего въ $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$, или въ $a : \frac{a'^4}{a^3}$, или напослѣдокъ въ $a^4 : a'^4$.

Такимъ же образомъ должны содержаться не только одночленныя количества, но и многочленныя. На примѣръ естьли изъ предидущихъ количествъ одно было бы изображено чрезъ $ab + cd$, а другое чрезъ $a'b' + c'd'$, то они должны, когда протяженія ихъ пропорціональны между собою, содержаться одно къ другому $= a^2 : a'^2$. Ибо по предложеніи $a : a' = b : b' = c : c' = d : d'$, получаемъ $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, и слѣд. содержаніе $ab + cd : a'b' + c'd'$ перемѣняется послѣ сего въ $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$, или въ $ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2}$, или въ $a^2 (ab + cd) : a'^2 (ab + cd)$, или наконецъ въ $a^2 : a'^2$.

Сіе послѣднее наблюденіе доказываетъ всеобщимъ образомъ, что площади подобныхъ фигуръ содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ ихъ боковъ, а толщины подобныхъ тѣлъ, какъ кубы; ибо каковы бы впрочемъ ни были фигуры и тѣла, первыя можно всегда почитать составлен-

ными изъ подобныхъ треугольниковъ, коихъ высоты и основанія пропорціональны въ каждой фигурѣ, а послѣднія изъ подобныхъ пирамидъ, которыхъ три протяженія также пропорціональны.

Отсюда явствуетъ, съ какою легкостію можно сравнивать всѣ количества, коимъ дано Алгебраическое изображеніе; нѣтъ ни малой нужды до того, что оныя количества будутъ одного рода, или разнаго, какъ на примѣръ конусъ и шаръ, призма и цилиндръ; лишь бы только они были одного свойства, то есть, лишь бы количества сіи были или оба тѣлами, или оба поверхностями, или оба и проч.

На примѣръ естьли пожелаемъ сравнить толщины съ поверхностями и линеями, то представивъ толщины двухъ тѣлъ чрезъ V и u, поверхности ихъ чрезъ S и s, а сходственныя ихъ линеи чрезъ L и l, получимъ $V : u = L^3 : l^3$, или $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} = L : l$. Равномѣрно $\sqrt{S} : \sqrt{s} = L : l$; слѣд. $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} = \sqrt{s} : \sqrt{s}$, или $V : u = \sqrt{s^3} : \sqrt{s^3}$; или $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{u^2} = S : s$; изъ сего не трудно примѣтить, что поверхности увеличиваются въ меньшемъ содержаніи противу тѣлъ.

215. Поелику извѣстно (*Геом.* 243), какимъ образомъ находится толщина усѣченной пирамиды или усѣченнаго конуса; то представивъ чрезъ b высоту цѣлой пирамиды, а чрезъ h' высоту пирамиды отсѣченной; чрезъ s поверхность нижняго основанія, а чрезъ s' поверхность верхняго основанія, получимъ

(Геом. 202) $s : s' = h^2 : h'^2$, и слѣд. $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$, или $h' = h \sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$; потомъ представивъ чрезъ k высоту усѣченной пирамиды, получимъ $k = h - h'$, и слѣд. $k = h - h\sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$, или $k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; изъ сего выходитъ $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. А какъ толщина цѣлой пирамиды состоитъ изъ $s \times \frac{h}{3}$, отсѣченной изъ $s' \times \frac{h'}{3}$, или (по вставкѣ найденной величины h') изъ $s' \times \frac{h}{3}\sqrt{\frac{s'}{s}}$; слѣд. толщина усѣченной пирамиды будетъ состоять изъ $\frac{hs}{3}$ — ... $\frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}$, или $\frac{h}{3} . \left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$, или наконецъ изъ $\frac{h}{3} . \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$; поставивъ теперь вмѣсто h найденную его величину, получимъ $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, по приведенiи $\frac{h}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}\right)$, или наконецъ по раздѣленiи на $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$ будемъ имѣть $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$ такую величину, которая показываетъ намъ, что всякая усѣченная пирамида или конусъ состоитъ изъ трехъ пирамидъ одинакой высоты, изъ которыхъ основанiемъ первой служитъ нижнее основанiе s усѣченной пирамиды, второй верхнее основанiе s', а третьей среднее пропорцiональное $\sqrt{ss'}$ между нижнимъ основанiемъ s и верхнимъ s'; ибо для опредѣленiя толщины сихъ трехъ пирамидъ надлежитъ (по причинѣ, что всѣ онѣ имѣютъ одинакую высоту) сложить основанiя ихъ, то есть, $s + \sqrt{ss'} + s'$, и умножить потомъ сумму сiю

на треть $\frac{k}{3}$ общей высоты, что въ точности сходствуетъ съ найденнымъ количествомъ.

216. Естьли представимъ чрезъ a полупоперешникъ шара, то площадь большаго его круга должна состоять изъ $\frac{ca^2}{2r}$; поверхность сего шара изъ $\frac{4ca^2}{2r}$, или изъ $\frac{2ca^2}{r}$, и слѣд. толщина его (Геом. 223 и 224) изъ $\frac{ca^2}{2r} \times {}_3 a$, или $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$.

Естьли возьмемъ x за высоту какого нибудь сегмента, то получимъ, какъ видѣть можно изъ рѣшенія послѣдняго вопроса (213), $\frac{caax}{3r}$ за толщину сектора, а $\frac{c}{2r} \times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3}$ за толщиву конуса, которой составляетъ часть его; слѣд. толщина сегмента будетъ состоять изъ $\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r} \cdot (2ax - xx) \cdot \frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r} [aax - \frac{(2ax - xx)}{2} \times (a-x)] = \frac{c}{3r} \cdot \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} = \frac{c}{3r} \cdot \frac{3axx - x^3}{2} = \frac{c}{6r} \cdot (3ax^2 - x^3)$.

Не трудно примѣтить послѣ сего, что по извѣстнымъ Алгебраическимъ изображеніямъ количествъ можно рѣшить множество вопросовъ, имѣющихъ къ нимъ отношеніе.

На примѣръ естьли потребуется узнать высоту такого конуса, которой въ толщинѣ равенъ извѣстному шару, и коего полупоперешникъ основанія равенъ полупоперешнику шара; то представивъ чрезъ h искомую высоту, чрезъ a радіусъ основанія, получимъ $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$ за толщину требуемаго конуса; но поелику онъ долженъ быть равенъ шару, которому полупоперешникомъ служитъ также a, то выходитъ $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ такая эквація, по которой опредѣляю $h = 4a$ по уничтоженіи въ обѣихъ ея частяхъ общаго фактора $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2}{3}$.

Сія величина h показываетъ, что высота конуса должна быть вдвое больше діаметра шара, въ чемъ увѣриться можно также по Геометріи: ибо шаръ (Геом. 246) составляя $\frac{2}{3}$ описаннаго около него цилиндра, долженъ быть вдвое больше такого конуса, которой будетъ имѣть одинакое основаніе и одинакую высоту съ тѣмъ цилиндромъ, то есть, онъ будетъ равенъ конусу одного съ нимъ основанія, но двойной высоты.

217. Предложимъ для втораго примѣра слѣдующій другой вопросъ.

По данному вѣсу извѣстной мѣры пороха требуется опредѣлить протяженія цилиндрической мѣры, въ коей можетъ помѣститься данной вѣсъ пороха; содержаніе высоты къ діаметру основанія сей мѣры предполагается также извѣстнымъ.

Положимъ $m : n$ за содержаніе высоты къ діаметру, а x за высоту; $\frac{nx}{m}$ будетъ представлять въ такомъ случаѣ діаметръ, а $\frac{c}{8r} \times \frac{n^2x^3}{m^2}$ толщину цилиндра. Положимъ теперь p за вѣсъ такого количества пороху, которое помѣстится въ цилиндрѣ, коего высота равна съ діаметромъ основанія, и кото-

раго толщина будетъ состоять изъ $\frac{c}{8r} \times a^3$; и такъ назвавъ P вѣсъ даннаго количества пороху, которое должно помѣстить въ требуемой вопросомъ мѣрѣ, получимъ $\frac{c}{8r} a^3 : \frac{c}{8r} \times \frac{n^2 x^3}{m^2} = p : P$; откуда выходитъ $x = a \sqrt[3]{\left(\frac{m^2 P}{n^2 p}\right)}$.

Знавши, что цилиндръ 12 дюймовъ въ діаметрѣ и такой же высоты помѣщаетъ въ себѣ близу 51 фунта пороху, можно узнать мѣру и другаго такого, въ которой входитъ $4\frac{1}{2}$ фунта, и котораго діаметръ составляетъ $\frac{3}{4}$ высоты. Ибо въ такомъ случаѣ a будетъ $= 12$, $p = 51$; $P = 4,5$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$, и слѣд. получимъ $x = 6^{д.}, 47$.

О кривыхъ Линеяхъ вообще и о Коническихъ Сѣченіяхъ въ особенности.

218. Между кривыми линеями, которыя разсматриваетъ Геометрія, однѣ бываютъ такого рода, что каждая ихъ точка можетъ опредѣлена быть одинакимъ закономъ, то есть, совершенно между собою сходными дѣйствіями и выкладками; въ другихъ же каждую точку надобно опредѣлять особеннымъ закономъ, то есть, выкладками и дѣйствіями, совершенно между собою различными; но разность сія сама подвержена также закону.

Что принадлежитъ до линей, начерченныхъ на бумагѣ случайно рукою писца, то такія черты хотя

но справедливости не могутъ быть предметомъ строгой Геометрїи, однакожъ посредствомъ изслѣдованїй ея приходимъ въ состоянїе, такъ сказать, копировать по прямымъ и надежнымъ способамъ и такїя изгибы линей, которыя, кажется, не подлежатъ никакому закону. Искуство соединять такимъ образомъ, помощїю сходныхъ между собою отношенїй, количества, коихъ подлинной законъ или совсѣмъ неизвѣстенъ, или весьма сбивчивъ, почитается немаловажнымъ, какъ въ Геометрическомъ, такъ и Алгебраическомъ ученїи.

Дабы притти въ состоянїе чертить кривыя линеи, которыя будутъ составлять настоящїй предметъ Геометрїи, то должно напередъ знать законъ, которому подлежатъ разныя точки ихъ изгибовъ. Сей законъ познается разными образами: на примѣръ, чрезъ изслѣдованїе дѣлопроизводства при непрерывномъ описанїи кривыхъ линей; такого рода есть кругъ, которой происходитъ отъ обращенїя данной линеи около данной точки, или чрезъ изслѣдованїе какого нибудь свойства, постоянно принадлежащаго каждой точкѣ кривой линеи. Наконецъ законъ сей можетъ представленъ быть уравненїемъ; и какъ вообще послѣднїй сей способъ надежнѣе и простѣе двухъ первыхъ открываетъ свойства, особенности и употребленїе кривыхъ линей, то мы намѣрены держаться его болѣе. Посмотримъ, какъ уравненїе можетъ изобразить натуру кривой линеи: начнемъ разсматривать съ окружности круга; потому

что кривыя линеи другаго рода намъ еще не извѣстны.

219. Положимъ, что AMB (*фиг.* 27) представляетъ такую кривую линею, въ которой намъ не извѣстно другаго свойства, кромѣ слѣдующаго: именно, что перпендикуляръ PM, опущенной изъ какой нибудь ея точки M на линею AB бываетъ всегда среднимъ пропорціональнымъ количествомъ между двумя частями AP и PB. Посмотримъ, какъ можно помощію Алгебры опредѣлить каждую точку сей кривой линеи и разныя ея свойства.

Естьли представимъ AB чрезъ a, часть AP чрезъ x, и перпендикуляръ PM чрезъ y, то PB будетъ въ такомъ случаѣ равна $a - x$; а какъ PM предположена среднею пропорціональною линеею между AP и PB, то получимъ $x : y = y : a - x$, и слѣд. $yy = ax - xx$.

Вообразимъ теперь, что AB раздѣлена на нѣкоторое число равныхъ частей, на примѣръ на 10, и изъ каждой точки раздѣленія поставлены перпендикуляры pm, pm, pm и проч. Не трудно послѣ сего примѣтить, что естьли въ найденной экваціи количество x предположено будетъ попеременно

равнымЪ каждой изЪ линей Ap, Ap и проч., то y сдѣлается равнымЪ каждой сходственной линеѣ pm, pm и проч.; потому что уравненіе $yy = ax - xx$ показываетЪ, что y остается вездѣ среднимЪ пропорціональнымЪ между x и $a - x$. И такЪ можно опредѣлить каждую изЪ точекЪ сей кривой линеи, давая попеременно x многія разныя величины, и вычисляя потомЪ сходственныя величины y. ВотЪ и примѣрЪ:

ПредположивЪ a раздѣленнымЪ на 10 равныхЪ частей, получимЪ $a = 10$, и слѣд. уравненіе перемѣнится вЪ $yy = 10x - xx$. НаконецЪ полагая попеременно $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$, будемЪ имѣть сходственными величинами $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{24}$, $y = \sqrt{25}$, $y = \sqrt{24}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{0}$; или $y = 3$; $y = 4$; $y = 4,5$; $y = 4,9$; $y = 5$; $y = 4,9$; $y = 4,5$; $y = 4$; $y = 3$; $y = 0$. Естьли величины сіи y будутЪ перенесены на перпендикуляры, поставленные изЪ сходственныхЪ величинЪ 1, 2, 3 и проч. x, то точки m, m, опредѣленныя такимЪ образомЪ, должны относиться кЪ кривой линеѣ такого свойства, которой каждой перпендикулярЪ pm будетЪ среднимЪ пропорціональнымЪ количествомЪ между двумя частями Ap и pB прямой линеи AB, кЪ такой напослѣдокЪ кривой линеѣ, которая представляетЪ, какЪ мы то немедленно увидимЪ, окружность круга.

А какЪ всякой квадратной корень состоитЪ изЪ двухЪ величинЪ, изЪ одной положительной, а другой отрицательной, то сверьхЪ найденныхЪ нами величинЪ y получимЪ еще слѣдующія другія $y = -3$; $y = -4$; $y = -4,5$; $y = -4,9$; $y = -5$; $y = -4,9$; $y = -4,5$; $y = -4$; $y = -3$; $y = 0$.

Для опредѣленія точекъ кривой линеи по симъ новымъ величинамъ y, надлежитъ въ сходственность нѣсколько разъ сказаннаго объ отрицательныхъ количествахъ, продолжить перпендикуляры pm, pm и проч. въ противную сторону, и продолжить изъ p въ m' количества pm', pm' и проч., равныя каждому сходственному съ ними pm.

Естьли пожелаешь назначить больше точекъ на сей кривой линеи, то раздѣли AB на большое число частей, на примѣръ на 100; то есть, сдѣлай $a = 100$.

Величина $y = o$ показываетъ, что кривая линея сходится съ прямою AB въ точкѣ B, или что $x = a = 10$; ибо перпендикуляръ pm становится въ такомъ случаѣ равенъ нулю, и слѣд. не находится никакого разстоянія между точкою m и прямою линеею AB. Не трудно также примѣтить, что она должна сойтися съ AB и въ точкѣ A; въ самомъ дѣлѣ поелику величина y въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ кривая линея встрѣчается съ прямою, должна равняться нулю; то дабы узнать оныя мѣста, должно въ уравненіи $yy = ax - xx$ предположить y равнымъ нулю, отъ чего она превратится въ $o = ax - xx$; а какъ $ax - xx$ состоитъ изъ $x \times (a - x)$, то произведеніе сіе въ двухъ случаяхъ можетъ равняться нулю,

именно когда $x = o$ и когда $x = a$; слѣд. на оборотъ y будетъ равняться нулю въ тѣхъ же двухъ случаяхъ; но явствуетъ, что $x = o$ въ точкѣ A, и $x = a$ въ точкѣ B; и такъ кривая линея въ самомъ дѣлѣ сходится съ AB въ точкахъ A и B.

Послѣ сего примѣра можно примѣтить, какимъ образомъ уравненіе служитъ къ опредѣленію разныхъ точекъ кривой линеи. Мы увидимъ со временемъ и другіе примѣры, а теперь изъяснимъ нѣкоторыя нужныя въ послѣдующемъ употребленіи слова.

220. Когда нужно изобразить уравненіемъ натуру какой нибудь кривой линеи, тогда относимъ каждую изъ точекъ m, m и проч. или представляемъ ее относящеюся къ двумъ постояннымъ линеямъ AB и OAO, составляющимъ между собою извѣстной уголъ (острой, прямой или тупой); потомъ вообразивъ изъ каждой точки m параллельныя mp и mp' съ линеями OAO и AB, заключаемъ о положеніи сей точки. Она становится извѣстною тотчасъ, какъ скоро узнаемъ величины mp' или Ap и pm, или какъ скоро узнаемъ одну какую нибудь изъ сихъ линей и содержаніе ея съ другою.

И такъ подъ словами: уравненіе изображаетъ натуру кривой линеи, мы не иное что разумѣемъ, какъ то, что уравненіе представляетъ для каждой точки *m* содержаніе между линеями Ap и *mp*, и слѣд. по извѣстной одной изъ нихъ эквація опредѣляетъ и другую; кривая линея почитается тѣмъ возвышеннѣйшаго порядка, чемъ сложнѣе бываетъ содержаніе.

Линеи Ap или *mp′*, измѣряющія разстояніе каждой точки *m* отъ одной OAO изъ двухъ сравнительныхъ линей, называются *абсциссами*, а линеи *mp* или *p′*A, измѣряющія разстояніе отъ другой сравнительной линеи AB, *ордонатами*; линея AB называется *осью абсциссъ*, а линея OAO *осью ордонатъ*. Точка A, откуда начинается счетъ абсциссамъ, именуется *началомъ абсциссъ*, а та, отъ которой счисляются ордонаты Ap′ или *pm* *началомъ ордонатъ*; въ *фигурѣ* 27 обѣ сіи точки представляетъ одна и та же A. Хотя можно считать абсциссы и ордонаты отъ разныхъ точекъ, однако безъ особенной причины дѣлать того не надобно; потому что лучше и простѣе вести для нихъ счетъ отъ одной и той же.

Линеи Ap, *pm* называются общимъ именемъ *координатами кривой линеи*; и при-

нимая ихъ, какъ принадлежащія равно всякой точкѣ кривой линеи, называемъ ихъ сверьхъ того *неопредѣленными*; самыя буквы x и y, которыя употребляются для означенія Ap и pm, получаютъ тоже названіе.

221. Приступимъ теперь къ уравненію вышенайденному, и посмотримъ, какъ можно вывести изъ него свойства кривой линеи.

1°. Изъ середины C линеи AB проведи къ какой нибудь точкѣ M кривой линеи прямую CM; въ какомъ бы мѣстѣ это ни случилось сдѣлать, треугольникъ MPC будетъ всегда прямоугольной, и слѣд. получимъ $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, то есть, (поелику $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$), $yy = \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; а какъ прямая MP или y служитъ повсюду среднею пропорціональною между AP и PB, то повсюду произойдетъ $yy = ax - xx$, и слѣд. повсюду будемъ имѣть также $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$, то есть, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$; а какъ по извлеченіи квадратнаго корня выходитъ $MC = \frac{1}{2}a$, то должно заключить, что каждая точка M или m удалена равно отъ точки C; слѣд. кривая линея состоитъ изъ окружности круга.

2^e. По проведеніи изъ какой нибудь точки М или *m* кривой линеи къ концамъ А и В прямыхъ МА и МВ, получимъ въ прямоугольныхъ треугольникахъ МРА и МРВ, $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$ и $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, или вставивъ въ мѣсто сихъ количествъ Алгебраическія величины, $xx + yy = (AM)^2$, и $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$; потомъ сложивъ оба сіи уравненія, и вставивъ въ мѣсто yy величину его $ax - xx$, будемъ имѣть $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$, то есть, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; изображеніе сіе показываетъ свойство прямоугольнаго треугольника, и слѣд. по сему свойству можно заключить, что уголъ АМВ будетъ всегда прямой, на какомъ бы мѣстѣ кривой линеи ни была расположена точка М. (*Смотри Геом.* 65.)

3^e. Естьли въ уравненіи $xx + yy = (AM)^2$ поставимъ въ мѣсто yy величину его $ax - xx$, то получимъ $(AM)^2 = ax$, изъ котораго произходитъ такая пропорція $a : AM = AM : x$, или $AB : AM = AM : AP$, то есть, хорда АМ бываетъ всегда среднею пропорціональною между діаметромъ АВ и отрѣзкомъ или абсциссою АР. (*Смотри Геом.* 112).

Такимъ же образомъ можно сыскать всѣ свойства круга, доказанныя въ Геометріи, по одному предположенію, что ордоната PM или pm служитъ среднею пропорціональною между AP и PB или Ap и pB.

Мы считали доселѣ абсциссы отъ точки A начала діаметра, и потому имѣли уравненіе $yy = ax - xx$. Естьли же захочемъ считать ихъ отъ центра, то есть, естьли примемъ за абсциссы линеи CP, Cp и проч., то представивъ каждую изъ сихъ линей чрезъ z, получимъ CP = AC — AP, то есть, $z = \frac{1}{2}a - x$, и слѣд. $x = \frac{1}{2}a - z$. И такъ вставивъ въ уравненіи $yy = ax - xx$ въ мѣсто x величину сію, получимъ $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, или по приведеніи $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ такое уравненіе круга, въ которомъ предполагаются координаты перпендикулярными, и начало ихъ въ центрѣ.

Изъ всякаго свойства, существенно относящагося къ каждой точкѣ кривой линеи, можно вывести, по переведеніи его на Алгебраической языкъ, одинакое уравненіе для кривой линеи; по крайней мѣрѣ можно вывести его всегда, пока будутъ служить одинакіе абсциссы и одинакіе ордонаты: когдажъ перемѣнится начало или направленіе коор-

донатЪ, или когда перемѣнится и то и другое, тогда выходитЪ совсѣмЪ различное уравненіе, однако той же степени. Мы теперь только что видѣли истинну сего вЪ сдѣланной перемѣнѣ для абсциссЪ; ибо вЪ мѣсто уравненія $yy = ax - xx$ получили другое такое $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, которое, будучи выведено изЪ перваго, имѣетЪ основаніемЪ тожЪ свойство; наконецЪ естьли возмемЪ за начало слѣдующее другое свойство, что каждое разстояніе MC бываетЪ всегда одинаково и $= \frac{1}{2}a$, то назвавЪ CP, z; и PM, y; выведемЪ по причинѣ прямоугольнаго треугольника MPC, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, и слѣд. $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ уравненіе такое же, какое вывели выше изЪ другаго свойства.

О Эллипсисѣ.

222. ПриступимЪ теперь разсматривать свойство такой кривой линеи, вЪ которой сумма двухЪ разстояній $MF + Mf$ (*фиг.* 28). отЪ каждой ея точки M кЪ двумЪ другимЪ постояннымЪ F и f, бываетЪ всегда равна данной линеѣ a.

ЧтобЪ сыскать свойство сей кривой линеи, которая называется *эллипсисомЪ*, должно сыскать уравненіе, которое бы изобразило, какое отношеніе находится, вЪ силу

извѣстнаго свойства, между перпендикулярами PM, проведенными изъ каждой точки M, на опредѣленную линею Ff и между разстояніями ихъ FP или AP отъ какой нибудь точки F или A, взятой произвольно.

Для такого предмета беру за начало абсциссъ точку A, которую опредѣляю положивши изъ средины C линеи Ff, линею $CA = \frac{1}{2} a$; потомъ сдѣлавши CB = CA, представляю AP чрезъ x, PM чрезъ y, линею AF, которая принимается за извѣстное количество, чрезъ c, а линею FM чрезъ z, и получаю FP = AP — AF (*), $= x - c$; $MF = FMf - FM = a - z$, и $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c$.

Прямоугольные треугольники FPM, fPM даютъ $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$ и $(Mf)^2 = (PM)^2 + (fP)^2$, или $zz = yy + xx - 2cx + cc$, и $aa - 2az + zz = yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Вычитаю второе уравненіе изъ перваго и по уничтоженіи aa, нахожу $2az = 2ax + 2ac$

(*) Когда изъ точки M перпендикуляръ MP упадаетъ между A и F, тогда FP должна равняться $c - x$; но это не дѣлаетъ никакой перемѣны въ окончательномъ уравненіи, потому что для выводки его употребляется квадратъ FP, но квадратъ сей произходитъ ли изъ $c - x$ или $x - c$, состоитъ всегда изъ $xx - 2cx + cc$.

$-4cx$, слѣд. $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$. Вставивъ въ мѣсто z сію величину его въ уравненіи $zz = yy + xx - 2cx + cc$, получу $\frac{aaxx + 2aacx + aacc - 4acx^2 - 4ac^2x + 4ccxx}{aa} = yy + xx - 2cx + cc$; по уничтоженіи знаменателя, по переставкѣ членовъ и по приведеніи $aayy = 4aacx - 4accx - 4acx^2 + 4ccx^2$, или $aayy = (4ac - 4cc)ax + (4cc - 4ac)x^2$, или по причинѣ, что $4cc - 4ac$ равно $-(4ac - 4cc)$, буду имѣть $aayy = (4ac - 4cc)ax - (4ac - 4cc)x^2$; или наконецъ $aayy = (4ac - 4cc)(ax - xx)$; послѣ чего выходитъ $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)$

Вотъ каково уравненіе для кривой линей, которой каждая точка имѣетъ вышеозначенное свойство.

223. Посредствомъ сего уравненія можно начертить кривую линею такого рода чрезъ точки, принявъ за x разныя многія величины и сдѣлавши выкладку величинамъ y, какъ показано было выше въ разсужденіяхъ нашихъ о кругѣ; но поелику дѣлопроизводство остается одинаково, то мы оставляемъ его.

224. Можно также начертить эллипсисъ посредствомъ точекъ слѣдующимъ другимъ способомъ: сдѣлай CB = CA = $\frac{1}{2}a$, и взявши какое нибудь разстояніе Br, засѣки изъ точки f, какъ изъ центра, радіусомъ Br сверху и снизу AB дуги, которыя изъ точки F, какъ изъ центра, радіусомъ Ar пересѣки

въ M и M′. Всѣ точки M и M′, такимъ образомъ найденныя, будутъ принадлежать эллипсису.

225. Начальное свойство, по которому нашли мы уравненіе, представляетъ само собою весьма простое средство начертить сію кривую линею чрезъ непрерывное движеніе. Оно состоитъ въ слѣдующемъ: выбери произвольно двѣ точки, такія на примѣръ, какъ F и f, и воткни въ точки сіи спицы съ привязаннымъ къ нимъ снуркомъ, которой бы длиннѣе былъ разстоянія Ff; потомъ натягивая сей снурокъ очерти посредствомъ стиля M кривую линею; сія кривая линея представитъ эллипсисъ: ибо сумма разстояній стиля отъ обѣихъ точекъ F и f будетъ повсюду равна цѣлой длинѣ снурка.

226. Изъ предыдущаго не трудно заключить, что кривая линея пройдетъ чрезъ точки A и B, потому что FMf взята равна AB. Поелику $Cf = CF$, то и $AF = Bf$; слѣд. $AF + Af = Af + Bf = a$, и $BF + Bf = BF + AF = a$. Тожъ самое подтверждается и уравненіемъ; ибо для показанія тѣхъ мѣстъ, гдѣ кривая линея пересѣчетъ прямую продолженную Ff, надлежитъ сдѣлать $y = o$; но изъ такого предположенія выходитъ $\frac{4ac - 4cc}{aa} . (ax - xx) = o$; а какъ $\frac{4ac - 4cc}{aa}$ не можетъ равняться нулю, то должно по уравненію $ax - xx$ или $x \times (a - x) = o$; но это имѣетъ мѣсто въ двухъ случаяхъ, именно когда $x = o$, то есть, въ точкѣ A, и когда $x = a$ въ точкѣ B.

227. Эквація показываетЪ также, что кривая линея простирается какЪ сверху, такЪ и снизу AB, и что она остается одинакою вЪ обоихЪ случаяхЪ. ВЪ самомЪ дѣлѣ уравненіе $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa} . (ax - xx)\right]}$ изображаетЪ, что для каждой величины x или AP находится двѣ величины y или PM совершенно равныя; но какЪ величины сіи имѣютЪ противные знаки, то должны относиться кЪ противнымЪ сторонамЪ.

Явствуетъ также; что естьли изЪ середины C линеи AB поставится перпендикулярЪ DD′, то кривая линея раздѣлится онымЪ на двѣ части совершенно равныя и подобныя между собою. Это неминуемо слѣдуетЪ изЪ самаго чертежа; но мы еще больше вЪ истиннѣ сего увѣримся, сдѣлавши со временемЪ другія замѣчанія на показанное уравненіе.

228. Линея AB называется *большою осью* эллипсиса, а линея DD′ *меньшою осью*. Двѣ точки F и f называются *фокусами*. Точки A, B, D, D′ суть *верхи* осей; а точка C *центрЪ* ихЪ.

229. Естьли пожелаемЪ узнать величину ордонаты Fm″, проходящей чрезЪ *фо-*

кусъ, то должно положить AP или $x =$ AF $= c$; отъ чего произойдетъ $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}$ $\times (ac - cc) = \frac{4.(ac - cc)^2}{aa}$; по извлеченіи квадратнаго корня $y = \pm \frac{2.(ac - cc)}{a}$; слѣд. $m''m''' = \frac{4.(ac - cc)}{a}$. Сія линея $m''m'''$ называется *параметромъ* эллипсиса, и слѣд. *параметръ меньше учетвереннаго разстоянія с отъ фокуса* потому, что величина его $\frac{4.(ac - cc)}{a}$ представляя тожъ самое, что $4c - \frac{4cc}{a}$, неминуемо меньше $4c$.

Естьли представимъ величину параметра чрезъ p, то получимъ $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, и слѣд. $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; почему найденное уравненіе для эллипсиса можно перемѣнить въ слѣдующее другое $yy = \frac{p}{a} . (ax - xx)$, которое гораздо проще.

230. Дабы узнать, что за величину представляетъ линея CD, то предположивъ въ эквацiи $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} . (ax - xx)$, что AP или x равна AC или $\frac{1}{2}a$, получимъ ... $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} . (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$, и по приведе-

нiи $yy = ac - cc$; то есть, $(CD)^2 = ac - cc = c.(a - c) = AF \times BF$; изъ сего уравненiя выходитъ слѣдующая пропорцiя $AF : CD = CD : BF$; слѣд. CD *или половина меньшой оси служитъ среднею пропорцiональною линеею между разстоянiями какого нибудь фокуса отъ двухъ верховъ* A *и* B.

Поелику DD′ есть одна изъ примѣчательнѣйшихъ линей въ эллипсисѣ, и потому вводится она въ уравненiе предпочтительнѣе линеи AF или *c*. Въ сообразность сего введенiя назовемъ *b* сiю линею DD′; послѣ чего линея $CD = \frac{b}{2}$; а какъ только теперь нашли мы, что $(CD)^2 = ac - cc$, то получаемъ $\frac{bb}{4} = ac - cc$, или $bb = 4ac - 4cc$; слѣд. уравненiе эллипсиса можетъ перемѣниться въ $yy = \frac{bb}{aa} . (ax - xx)$.

А какъ $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, или $pa = 4ac - 4cc$, и $bb = 4ac - 4cc$, то по симъ двумъ уравненiямъ заключаемъ, что $pa = bb$, и слѣд. по представленiи сего уравненiя въ пропорцiи $a : b = b : p$ находимъ, что *параметръ служитъ третьею пропорцiональною линеею между большою и меньшою осью.*

231. Естьли въ экваціи $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ уничтожится знаменатель, то произойдетъ $aayy = bb\,(ax - xx)$, и слѣд. $yy : ax - xx = bb : aa$; наконецъ обративъ вниманіе на то, что $ax - xx$ представляетъ тоже, что $x \times (a - x)$, и вставивъ вмѣсто Алгебраическихъ количествъ самыя линеи, получимъ $(PM)^2 : AP \times PB = (DD')^2 : (AB)^2$; то есть, *квадратъ всякой ордонаты къ большой оси эллипсиса содержится къ произведенію двухъ абсциссъ AP и PB такъ, какъ квадратъ меньшой оси къ квадрату большой.* А какъ это свойство относится ко всѣмъ точкамъ эллипсиса, то слѣдуетъ, что *квадраты ордонатъ содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ.*

232. Разность между уравненіями эллипсиса $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ и круга, описаннаго по поперешнику AB (*фиг.* 29), состоитъ (221) въ томъ только, что въ первомъ количество $ax - xx$ умножено на $\frac{bb}{aa}$, то есть, на содержаніе квадрата меньшой оси къ квадрату большой; и такъ представивъ всякую ордонату PN круга чрезъ z, получимъ $zz = ax - xx$; вставивъ въ экваціи эллип-

сиса въ мѣсто $ax - xx$ величину zz, будемъ имѣть $yy = \frac{bb}{aa} zz$, а по извлеченіи квадратнаго корня, $y = \frac{b}{a} z$, или $ay = bz$ такое уравненіе, изъ котораго выходитъ $y : z = b : a$, или PM : PN = DD' : AB или = CD : AC или CE. Слѣд. заключимъ по этой пропорціи, что *ордонаты эллипсиса состоятъ изъ ордонатъ круга, описаннаго на большой оси, только пропорціонально уменьшенныхъ, именно въ содержаніи большой оси къ меньшой.*

Отсюда явствуетъ, какъ должно чертить эллипсисъ посредствомъ круга. Не трудно также примѣтить здѣсь, что самъ кругъ есть эллипсисъ, котораго обѣ оси a и b равны между собою, или котораго верхи осей отъ фокуса равны половинѣ большой оси, или котораго параметръ наконецъ одинаковъ съ діаметромъ; ибо предположивши въ предыдущихъ уравненіяхъ $b = a$, или $c = \frac{1}{2} a$, или $p = a$, получимъ $yy = ax - xx$ уравненіе круга.

233. По найденнымъ эквацiямъ должно заключить, что эллипсисъ не такъ, какъ кругъ, опредѣляется; для опредѣленія круга довольно одной линеи діаметра его, но для опредѣленія эллипсиса не довольно одной его большой оси AB (*фиг.* 28), а надобно еще знать или меньшую ось b или параметръ его p, или разстояніе c верха большой оси отъ фокуса. Какъ должно чертить эллипсисъ по извѣстнымъ его большой оси и разстоянію c, это было показано выше; но чтобъ описать его чрезъ непрерывное движеніе по даннымъ большой и меньшой осямъ, должно напередъ опредѣлить фокусы; а это сдѣлай такъ: возми половину большой оси за радіусъ, и засѣки изъ конца D (*фиг.* 28) меньшой оси, какъ изъ центра, двѣ ду-

ви, пересѣкающія большую ось въ точкахъ F и f; сіи точки будутъ желаемые фокусы: ибо сумма двухъ разстояній FD + Df должна равняться a, и слѣд. каждая изъ сихъ равныхъ между собою линей состоитъ изъ $\frac{1}{2}a$.

Естьли будутъ даны большая ось и параметръ, то для опредѣленія меньшой оси должно сыскать среднюю пропорціональную между сими двумя линеями, чему научаетъ найденная выше (230) пропорція $a : b = b : p$.

234. *Естьли чрезъ какую нибудь точку* M *эллипсиса* (фиг. 28) *продолжится линея* fM *изъ того или другаго фокуса до тѣхъ поръ, пока продолженіе* MG *будетъ равно другому разстоянію* MF, *и когда по соединеніи точекъ* G *и* F *линеею* GF, *проведется изъ точки* M *къ сей линеи перпендикуляръ* MOT, *то сей перпендикуляръ будетъ служить тангенсомъ эллипсису.*

Ибо по причинѣ равенства линей MF и MG, линея MT должна быть перпендикулярна къ серединѣ GF. Естьли изъ какой нибудь другой точки N сей же линеи проведутся двѣ прямыя NG и NF, то новыя сіи линеи должны быть также равны между собою. Положимъ теперь, что MT могла коснуться эллипсису и въ другой еще точкѣ, на примѣръ N; тогда по проведеніи Nf должно выйти FN + Nf равно MF + Mf,

или GM + Mf, то есть, Gf; но Gf меньше GN + Nf, и слѣд. меньше FN + Nf; слѣд. точка N внѣ эллипсиса.

235. Углы FMO, OMG по сдѣланной конструкціи равны между собою, и притомъ OMG равняется противоположенному себѣ fMN; слѣд. FMO равенъ fMN. *И такъ двѣ линеи, простирающіяся отъ одной точки эллипсиса къ двумъ фокусамъ, составляютъ съ тангенсомъ равные углы.*

Опытъ научаетъ насъ, что лучь свѣта, упадая на поверхность, дѣлаетъ уголъ отраженія, равный паденію. Почему естьли F принята будетъ за точку, свѣтъ содержащую, то всѣ лучи, выходящіе изъ нее, упавши на изгибъ MAM′, должны собраться въ f, и на оборотъ.

Естьли изъ точки M поставится на линеѣ MT перпендикуляръ MI (которой будетъ также служить перпендикуляромъ и кривой линеѣ), то сей перпендикуляръ раздѣлитъ угловъ FMf на двѣ равныя части; ибо естьли изъ прямыхъ угловъ IMT и IMN вычтешь равные углы FMT и fMN, то остальные углы FMI и IMf будутъ также равны.

236. И такъ не трудно по силѣ сего опредѣлить величину разстоянія PI отъ ордонаты до мѣста, гдѣ ось пересѣкается перпендикуляромъ MI. Сія линея PI называется *поднормальною*, а MI *нормальною линеею*.

Для опредѣленія PI, должно напередъ вычислить FI. Поелику уголъ FMf раздѣленъ на двѣ равныя части, то $Mf : MF = fI : FI$ (*Геом.* 104); и слѣд. (*Геом.* 98) $Mf + MF : Mf - MF = fI + FI : fI - FI$; но $Mf + MF = a$, почему представивъ MF чрезъ z, какъ выше (222), получимъ $Mf = a - z$, и слѣд. $Mf - MF = a - 2z$; притомъ же $fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c$, и $fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI$; и для того вставивъ въ послѣдней пропорціи вмѣсто линей найденныя сіи величины, будемъ имѣть $a : a - 2z = a - 2c : a - 2c - 2FI$; изъ сей пропорціи выходитъ такое уравненіе $aa - 2ac - 2a \times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz$, по которому заключаю, что $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, или вставивъ въ мѣсто z величину его $\frac{ax + ac - 2cx}{a}$, найденную (222), получаю $FI = \ldots \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$; но $FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI$; слѣд. $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c = \frac{2aac - 2acc - 4acx + 4ccx}{aa} = \frac{2a.(ac - cc) - 4x.(ac - cc)}{aa} = \frac{2a - 4x}{aa} \times (ac - cc)$, или вставивъ въ мѣсто $ac - cc$ вели-

чину его $\frac{bb}{4}$ (230), нахожу наконецъ PI $=$ $bb \cdot \frac{(a-2x)}{2aa}$, или PI $= \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2} a - x)$.

237. Можно также опредѣлить величину разстоянія PT отъ ордонаты до пересѣченія тангенса; сіе разстояніе называется *субтангенсомъ*. Поелику треугольникъ IMT прямоугольной, и PM представляетъ перпендикуляръ, опущенный изъ прямаго угла, то происходитъ (*Геом.* 112) слѣдующая пропорція PI : PM $=$ PM : PT, то есть, $\frac{bb}{aa} \times (\frac{1}{2} a - x) : y = y :$ PT; слѣд. PT $= \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a - x)}$, или (по вставкѣ величины $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$ равной yy), PT $= \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Посредствомъ Алгебраическаго изображенія двухъ линей PI и PT можно провести перпендикуляръ и тангенсъ ко всякой данной точкѣ M эллипсиса. Ибо естьли точка M будетъ извѣстна, то опустивъ перпендикуляръ MP, получимъ величину AP, x. А какъ количества a и b предполагаются извѣстными, то будетъ также извѣстно все, что относится къ величинамъ PI и PT.

238. По изображенію PT можно заключить также, что тангенсы MT эллипсиса и TN (*фиг.* 29) круга, описаннаго на большой оси AB (тангенсы, которые приведены къ точкамъ N и M, гдѣ ордоната PM эллипсиса пересѣкаетъ окружности обѣихъ кривыхъ линей) сойдутся въ одной точкѣ T на продолженіи оси. Поелику въ изображеніи PT второй оси b не находится, то сія линея PT должна остаться всегда

одинакою, пока a и x будутъ одинаковы. Почему всѣ тангенсы, проведенные къ сходственнымъ точкамъ всякаго рода эллипсисовъ, начерченныхъ на большой оси АВ, должны неминуемо сойтися въ одной точкѣ Т.

239. Естьли къ РТ (*фиг.* 28) прибавишь $CP = \frac{1}{2}a - x$, то произойдетъ $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$, или по приведеніи всего въ дробь $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$, то есть, $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$. Изъ сего уравненія можно вывести слѣдующую пропорцію $CP : AC = AC : CT$.

240. Посредствомъ прямоугольнаго треугольника ТРМ можно получить изображеніе ТМ; ибо $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = [ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

241. Естьли изъ какой нибудь точки М эллипсиса приведешь на меньшую ось DD′ перпендикуляръ или ордонату MP′, и потомъ DP′ представишь чрезъ x', а Mp' чрезъ y', то произойдетъ $DP' = CD - CP' = CD - PM$, то есть, $x' = \frac{1}{2}b - y$, и слѣд. $y = \frac{1}{2}b - x'$. Равномѣрно получимъ $MP' = CP = CA - AP$, то есть, $y' = \frac{1}{2}a - x$, и слѣд. $x = \frac{1}{2}a - y'$. Вставивъ величины сіи x и y въ уравненіи

$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, или $aayy = bb(ax - xx)$, получимъ $\frac{1}{4}aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abby' - \frac{1}{4}aabb + abby' - bby'y'$, или по приведеніи $bby'y' = aabx' - aax'x'$; откуда выходитъ $y'y' = \frac{aa}{bb}(ax' - x'x')$ подобное уравненіе тому, какое вывели мы для большой оси, и по которому можно сдѣлать тѣже заключенія, какія изъяснены выше, именно: *квадратъ ордонаты* P′M *меньшой оси содержится къ произведенію двухъ абсциссъ* DP′ × P′D′ *такъ, какъ квадратъ большой оси къ квадрату меньшой*; ибо уравненіе сіе можетъ представлено быть слѣдующею пропорціею $y'y' : ax' - x'x' = aa : bb$, но $ax' - x'x'$ произходитъ изъ $x'(a - x')$, или DP′ × P′D′. Можно заключить также, *что квадраты ордонатъ меньшой оси содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ*; и что *эллипсисъ можно начертить посредствомъ круга, описанного на меньшой его оси, продолживъ ордонаты круга въ равномъ содержаніи меньшой оси къ большой.*

242. Изъ предыдущаго явствуетъ, что свойства второй оси во всемъ сходны съ

найденными свойствами первой, кромѣ нѣкоторыхъ отношенiй къ фокусамъ.

Естьли нужно будетъ опредѣлить на второй оси сходственныя линеи съ тѣми, которыя мы опредѣлили на первой, то есть, PT′, P′T′, CT′ и MT′ (*фиг.* 28), то весьма легко получить ихъ можно посредствомъ найденныхъ линей первой оси, имѣющихъ къ нимъ отношенiе, и помощiю подобныхъ треугольниковъ, которые не трудно различить въ фигурѣ. Представивъ сiи линеи посредствомъ абсциссъ DP′ или x', получимъ всѣ тѣже изображенiя, какiя найдены выше въ x для соотвѣтствующихъ линей первой оси.

Вторая ось имѣетъ также и *параметръ* свой; но параметръ сей не такого рода линея, которая проходитъ чрезъ фокусъ (потому что фокусовъ на второй оси не находится), а такая, которая состоитъ изъ третьей пропорцiональной линеи ко второй и первой оси.

243. Доселѣ считали мы абсциссы отъ верху; естьлижъ начнемъ считать ихъ отъ центра C, то представивъ абсциссу CP чрезъ z, получимъ AP или $x = \frac{1}{2}a - z$; вставивъ величину сiю x въ уравненiи $yy = \frac{bb}{aa}$

$(ax - xx)$ и въ величинахъ PI, PT, CT, и $(TM)^2$, найдемъ $yy = \frac{bb}{aa} . (\frac{1}{4} aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{4} aa - zz}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4} aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{4} aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \frac{\frac{1}{4} aa - zz}{zz}$.

244. Прямая линея MCM′, проведенная изъ какой нибудь точки M эллипсиса (*фиг.* 30) чрезъ средину C оси AB, или чрезъ центръ и оканчивающаяся съ противной стороны на окружности эллипсиса, называется *діаметромъ* или *поперешникомъ*; линея же NN′, проведенная параллельно чрезъ центръ C съ тангенсомъ MT, которой простирается изъ верху M, называется *сопряженнымъ поперешникомъ*. Линея *m*O, упадающая на діаметръ MM′ параллельно съ MT, именуется *ордонатою* его, а MO абсциссою. *Параметръ* діаметра MM′ состоитъ изъ третьей пропорціональной линеи къ MM′ и NN′.

245. Мы намѣрены показать теперь, что ордонаты *m*O всякаго поперешника имѣютъ сходныя свойства съ ордонатами осей.

Для доказательства сего опусти изъ точки *m* и O перпендикуляры *mp*, OQ на ось AB, потомъ проведи *m*S параллельную

съ тою же осью. По представленіи AB чрезъ a, PM чрезъ y, CP чрезъ z, Qp чрезъ g, CQ чрезъ k, получишь $AP = \frac{1}{2}a - z$, $PB = \frac{1}{2}a + z$, $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$, $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Изъ подобія треугольниковъ TPM, mSO выходитъ $TP : PM = mS$ или $pQ : SO$; то есть, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y = g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$ Изъ подобія треугольниковъ CMP, COQ выходитъ $CP : PM = CQ : QO$, то есть, $z : y = k : QO = \frac{ky}{z}$; слѣд. $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. А какъ точка m принадлежитъ эллипсису, то слѣдуетъ (231), что $(pm)^2 : (PM)^2 = AP \times pB : AP \times PB$, то есть, $(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz})^2 : yy = (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z) \times (\frac{1}{2}a + z)$; или $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzyy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy = \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$, или по умноженіи крайнихъ и среднихъ (обратнвъ притомъ вниманіе на количества, которыя будутъ умножены и раздѣлены вмѣстѣ какъ на $\frac{1}{4}aa - zz$, такъ и на z), произойдетъ $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aayy - kkyy - 2gkyy - ggyy$, или по

раскрытіи члена $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz)$, по уничтоженіи количествъ $-kkyy$ и $-2gkyy$, которыя должны находиться въ обѣихъ частяхъ эквацiи, и по раздѣленіи на yy, получимъ наконецъ $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$ такое уравненіе, какое нужно для нашей цѣли; но прежде нежели сдѣлаемъ изъ него употребленіе, разсмотримъ его.

Естьли точка O, которую мы здѣсь предполагаемъ всякое мѣсто занимающею, упадетъ въ C, то есть, когда линея mO проходя чрезъ центръ, сдѣлается CN, тогда CK или k обратится въ нуль, а линея Qp или g въ CR. И такъ естьли въ найденномъ уравненіи допустишь $k = o$, то поуничтоженіи знаменателя, по переставкѣ членовъ, наконецъ по приведеніи и раздѣленіи на $\frac{1}{4}aa$, произойдетъ $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; то есть, $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

Сдѣлавъ сіе замѣчаніе, возвратимся къ своей цѣли; представимъ CM чрезъ $\frac{1}{2}a'$, CN чрезъ $\frac{1}{2}b'$, mO чрезъ y', CO чрезъ z'. Изъ подобія треугольниковъ CPM, CQO выходитъ CM : CO = CP : CQ, или $\frac{1}{2}a' : z' =$

$z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$. Треугольники CNR, mSO по причинѣ параллельныхъ боковъ подобны, и для того даютъ $mO : mS = CN : CR$, или $y' : g = \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; слѣд. $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$. Но какъ найдено выше, что $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$, то должно заключить, что $\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; откуда выходитъ $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$. Естьли въ уравненіи $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, вставимъ вмѣсто gg и kk найденныя теперь величины, то получимъ $\frac{1}{4}aa$. $\frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, или по приведенія и по раздѣленіи на $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; или по уничтожении знаменателей $\frac{1}{4}a'a'$ и $\frac{1}{4}b'b'$, $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{16}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, и наконецъ $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$; изъ сего уравненія происходитъ слѣдующая пропорція $yy : \frac{1}{4}a'a' - z'z' = b'b' : a'a'$, то есть, $(mO)^2 : MO \times OM' = (NN')^2 : (MM')^2$. И такъ уравненіе, относящееся къ двумъ какимъ нибудь сопряженнымъ діаметрамъ, совершенно подобно выведенному нами для двухъ осей.

246. Естьли предположимъ $y' = o$, то получимъ $\frac{1}{4}a'a' - z'z' = o$, и слѣд. $z' =$

$\pm \frac{1}{2} a'$. Изъ сего заключить должно, что эллипсисъ встрѣчается съ линеею MM′ въ двухъ точкахъ M и M′, равно удаленныхъ отъ центра C; слѣд. *всѣ діаметры эллипсиса пересѣкаются въ центрѣ пополамъ.*

247. Уравненіе $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, изъ котораго выходитъ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$, показываетъ, что точка m', происходящая отъ продолженія mO до тѣхъ поръ, пока Om' сдѣлается = Om, будетъ принадлежать кривой линеѣ, и слѣд. *каждой діаметръ эллипсиса раздѣляетъ пополамъ всѣ линеи, которыя проведены будутъ параллельно съ тангенсомъ, проходящимъ чрезъ начало его* M.

248. Изъ сего можно заключить 1[e], что тангенсъ, проведенный къ концу N діаметра NN′, бываетъ всегда параллеленъ съ діаметромъ MM′. 2[e]. Изъ того, что $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4} a'a' - z'z')}$ слѣдуетъ заключить, что ордонаты Om діаметра MM′ бываютъ одинаковы съ ордонатами круга, которому поперешникомъ служитъ MM′, уменьшаясь или увеличиваясь для сего послѣдняго въ содержаніи a' къ b', и склоняясь подъ угломъ

равнымъ углу сопряженныхъ діаметровъ. Естьли $a' = b'$, то ордонаты сіи совершенно равны ордонатамъ круга. Наконецъ естьли нужно будетъ узнать, въ какомъ мѣстѣ эллипсиса оба сопряженные діаметры могутъ быть равны, то надлежитъ сыскать, въ какомъ мѣстѣ $CP = CR$, или $(CP)^2 = (CR)^2$, то есть, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; а какъ изъ сей экваціи выходитъ $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, то сдѣлай слѣдующую конструкцію. Опиши на большой оси AB, какъ на діаметрѣ полкруга ANEB (*фиг.* 29), пересѣкающійся въ E меньшою осью CD, и раздѣли дугу AE въ N'' на двѣ равныя части; потомъ продолживъ ордонату $N''P$, пересѣкающую эллипсисъ въ M'' и M', проведи изъ сихъ точекъ къ центру CM'' и CM': сіи линеи представятъ два равные сопряженные діаметра. Ибо представивъ CP чрезъ z, получимъ въ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ CPN'', котораго уголъ PCN'' равный ACN'' состоитъ изъ 45 градусовъ, $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; слѣд. $zz = \frac{1}{8}aa$, и $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

249. Естьли изъ центра C (*фиг.* 30) поставленъ будетъ перпендикуляръ CF къ тангенсу TM, то по причинѣ подобія треугольниковъ TPM, TCF можно сдѣлать та-

кую посылку TM : PM = CT : CF, изъ которой выходитъ $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Равномѣрно въ треугольникахъ TPM и CNR, подобныхъ по причинѣ параллельныхъ боковъ, можно послать TM : PT = CN : CR; слѣд. $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$. Изъ сихъ уравненій вывожу $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, или по составленіи квадратовъ $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; но мы видѣли выше, что yy или $(PM)^2 = \frac{bb}{aa} . (\frac{1}{4} aa - zz)$, $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16} a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4} aa - zz)^2}{zz}$, и $(CR)^2 = \frac{1}{4} aa - zz$ (245). И такъ вставивъ сіи количества, получу наконецъ по сдѣланіи надлежащаго приведенія $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16} aabb$, и слѣд. $CN \times CF = \frac{1}{4} ab$; но по проведеніи тангенса NT'', пересѣкающаго TM въ точкѣ I, произведеніе CN × CF должно представлять площадь параллелограмма CMIN, а $\frac{1}{4} ab$ или $\frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b$ прямоугольникъ, составленный изъ двухъ полу-осей. И такъ *параллелограммы, состоящіе изъ тангенсовъ, проведенныхъ къ концамъ сопряженныхъ діаметровъ, равны между собою и прямоугольнику, начерченному по двумъ полуосямъ.*

250. Изъ подобія тѣхъ же треугольниковъ TPM и CRN выходитъ $PT : PM = CR : RN$; слѣд. $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, или $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa}$; въ прямоугольныхъ треугольникахъ CRN и CPM получу $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$ и $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; слѣд. $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; вставивъ въ первой части сего уравненія вмѣсто линей Алгебраическія ихъ величины, буду имѣть по приведеніи $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$. И такъ *сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсиса равна суммѣ квадратовъ двухъ полуосей.*

251. Естьли въ уравненіи $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$ вставлены будутъ вмѣсто CR и RN величины ихъ, то произойдетъ $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; а какъ нашли мы выше, что $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$, то слѣдуетъ изъ того, что $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$. Въ подобныхъ треугольникахъ TPM, MP′T′ выво-

жу пропорцію, составивъ изъ каждаго ея члена квадратъ, $(PT)^2 : (TM)^2 = (P'M)^2 : (MT')^2$, или $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} = zz : (MT')^2$; слѣд. $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; слѣд. $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$, или $TM \times MT' = (CN)^2$. Напослѣдокъ представивъ параметръ діаметра MM' чрезъ p' получу $2CM : 2CN = 2CN : p'$ (244), и слѣд. $2p' \times CM = 4(CN)^2$, или $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; и такъ $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$, и слѣд. $CM : TM = MT : \frac{1}{2}p'$.

Естьли на TT', какъ на діаметрѣ (*фиг.* 31), начертишь полкруга, то окружность его должна пройти чрезъ центръ C, потому что уголъ TCT' прямой; потомъ продолживъ полкруга, пока окружность его пересѣчется въ V, получишь по свойству круга (*Геом.* 120) $CM : TM = MT' : MV$; слѣд. $MV = \frac{1}{2}p'$.

252 И такъ по извѣстнымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ MM' и NN' и углу, которой они составляютъ между собою, можно весьма удобно опредѣлить оси эллипсиса и начертить его слѣдующимъ образомъ.

Продолжи CM на количество MV, равное полупараметру его; изъ середины X линеи CV поставъ перпендикуляръ XZ, пересѣкающій въ Z неопредѣленную линею TT', проведенную чрезъ точку M паралельно съ NN'. Изъ точки Z какъ изъ центра и радіусомъ равнымъ ZC опиши кругъ, которой пересѣчетъ TT' въ двухъ точкахъ T и T'; наконецъ къ

точкамъ симъ проведи изъ C линеи TC и T'C, которыя покажутъ направленіе осей. Для определенія величины сихъ осей опусти перпендикуляры MP и MP', и сделай CA равную средней пропорціональной между CT и CP, а CD равную средней пропорціональной между CT' и CP'; ибо видели мы выше (239), что CP : CA = CA : CT; не трудно доказать также (посредствомъ подобныхъ треугольниковъ TPM и TCT' и известныхъ величинъ TP, PM и CT), что $CT' = \frac{(CD')^2}{Cp'}$, то есть, CP' : CD = CD : CT'.

О Гиперболе.

253. Разсмотримъ теперь такую кривую линею (*фиг.* 32), которой каждая точка M имеетъ следующее свойство: разность Mf — MF разстояній ея Mf и MF отъ двухъ постоянныхъ точекъ f и F должна быть везде одинакова и равна данной линеи *a*.

Мы намерены сыскать, такъ какъ выше при разсматриваніи эллипсиса, такое уравненіе, которое бы показало отношеніе между перпендикулярами PM, проведенными на линею Ff и ихъ разстояніями Fp или AP отъ какой нибудь постоянной точки F или A, взятой произвольно на линее fF.

Для достиженія сей цели беру за начало абсциссъ точку A, которую определяю сделавши изъ середины C разстоянія Ff линею CA = $\frac{1}{2}a$; потомъ кладу CB = CA. По совершеніи сего представляю AP чрезъ *x*,

PM чрезъ y, линею AF, которая предполагается извѣстною, чрезъ c, и линею FM чрезъ z: изъ положенія сего выходитъ $FP = AF - AP = c - x$ (*); $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; а какъ $Mf - MF = a$, то $Mf = a + MF = a + z$.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ FPM, fPM получаю $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, и $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$; то есть, $cc - 2cx + xx + yy = zz$, и $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Вычитаю первое уравненіе изъ втораго, и нахожу по уничтоженіи aa, $4cx + 2ac + 2ax = 2az$, отсюда вывожу $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; вставивъ въ первомъ уравненіи вмѣсто z сію величину его, получимъ $cc - 2cx + xx + yy = \ldots \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$, или по уничтоженіи знаменателя, по переставкѣ членовъ и по приведеніи $aayy = 4aacx + 4accx + 4acxx + 4ccxx$, или $aayy =$

(*) Естьли точка P будетъ по другую сторону F относительно къ A, то FP сдѣлается $= x - c$; но это не сдѣлаетъ никакой перемѣны въ заключительномъ уравненіи.

$(4ac + 4cc)(ax + xx)$; наконецъ . . .
$$yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx).$$

254. Это уравненїе представляетъ способъ чертить кривую линею такого рода по точкамъ; для опредѣленїя же сихъ точекъ должно полагать попеременно разныя многїя величины количеству x.

Можно начертить гиперболу еще и такъ: возми произвольно часть Br больше BF, и изъ точки f какъ изъ центра радїусомъ Br засѣки дугу, которую пересѣки въ точкѣ M другою дугою, описанною изъ F радїусомъ Ar; точка M будетъ принадлежать гиперболѣ.

Наконецъ можно описать сїю кривую линею чрезъ непрерывное движенїе слѣдующимъ образомъ.

Утверди въ точкѣ f линейку неопредѣленной величины такъ, чтобъ она могла свободно обращаться около той точки. Къ точкѣ F и къ концу Q линейки привяжи нитку или снурокъ FMQ такой величины, чтобъ разность его съ fQ была равна AB; потомъ посредствомъ стиля M, приложивъ часть MQ снурка къ линейкѣ и не опуская его нигдѣ, подвигай стиль отъ M къ A; въ продолженїи сего движенїя линейка должна постепенно опускаться или склоняться къ fF, часть FM уменьшаться, а стиль M описать желаемую кривую линею AM, которая называется *Гиперболою*. Въ самомъ дѣлѣ не трудно примѣтить, что цѣлая fQ или $fM + MQ$ равно какъ и $FM + MQ$ остаются вездѣ одинакой величины; слѣд. и разность ихъ $fM + MQ - FM - MQ$ или $fM - FM$ должна быть вездѣ одинакова.

255. Выводя изъ уравненїя $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$ двойную величину $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)\right]}$, должно заклю-

чить, что для одной и той же абсциссы AP или x находятся двѣ равныя ордонаты PM, PM′, упадающія съ противныхъ сторонъ на продолженіе линеи AB, которая называется *первою осью*; изъ сего явствуетъ, что кривая линея имѣетъ у себя и другую отрасль AM′ совершенно равную первой; сіи отрасли простираются въ безконечность, потому что по мѣрѣ того, какъ увеличивается x, увеличиваются также и обѣ величины $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)\right]}$.

256. Естьли въ этомъ количествѣ сдѣлаешь x отрицательнымъ, то есть, естьли предположишь точку P выше A, то оно превратится въ $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa}(x^2 - ax)\right]}$; и пока x въ отрицательномъ изображеніи $xx - ax$, или $x(x - a)$ будетъ меньше a, то количество $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa}(xx - ax)\right]}$ останется до тѣхъ поръ умственнымъ, и слѣд. y не можетъ имѣть настоящей величины отъ A до B; но какъ скоро x будетъ превосходить a, то $xx - ax$ сдѣлается тотчасъ положительнымъ, и y получаетъ опять настоящія величины. Изъ сего слѣдуетъ заключить, что отъ точки B простирается новая кривая линея mBm', которая на подобіе первой простирается безко-

нечно въ объ стороны продолженія AB, и которая совершенно равна той, потому что когда сдѣлаешь $Bp = AP$, то $xx - ax$ или $Ap \times pB$ превратится въ $AP \times PB$; а изъ сего должно заключить, что $pm = PM$.

257. Естьли въ уравненіи $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}$ $(ax + xx)$ сдѣлано будетъ $y = o$, то произойдетъ $ax + xx$ или $x.(a + x) = o$, также $x = o$ и $x + a = o$, или $x = -a$. Изъ сего заключить должно, что кривая линея касается оси AB въ двухъ точкахъ A и B.

258. Естьли предположишь $AP = AF$, то есть, $x = c$, то за величину ордонаты Fm'', проходящей чрезъ точку F (которая равно какъ и точка f называются *фокусами*), получишь $y = \pm \sqrt{[\frac{4ac + 4cc}{aa}} (ac + cc)] = \pm \sqrt{[\frac{4(ac + cc)^2}{aa}]} = \pm \frac{2(ac + cc)}{a}$; слѣд. двойная ордоната $m''m'''$ $= \frac{4(ac + cc)}{a}$, она же называется *параметромъ* гиперболы. И такъ представивъ сію линею чрезъ p, получишь $p = \frac{4(ac + cc)}{a}$, и слѣд. $\frac{p}{a} = \frac{4(ac + cc)}{aa}$. Естьли вставишь $\frac{p}{a}$ въ прежде найденномъ уравненіи сей кривой

линеи, то оно перемѣнится въ другое гораздо простѣйшее $yy = \frac{p}{a}(ax + xx)$.

По величинѣ p можно заключить, что *параметръ первой оси гиперболы больше учетвереннаго разстоянія отъ верху* A *къ фокусу* F; ибо сія величина $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, превращаясь въ $p = 4c + \frac{4cc}{a}$ очевидно больше $4c$.

259. Перпендикуляръ DD′, проходящій чрезъ середину C линеи AB, котораго половина CD представляетъ среднюю пропорціональную между c и $a + c$, то есть, между AF и fA, называется *второю осью* Гиперболы; представивъ ее чрезъ b, получимъ $\frac{bb}{4} = c.(a + c)$, или $bb = 4ac + 4cc$, и слѣд. по вставкѣ величины сей bb въ уравненіи $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$, уравненіе перемѣнится въ $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$. Не трудно примѣтить здѣсь, что выведенныя нами три уравненія для гиперболы разнятся отъ трехъ уравненій эллипсиса одними только знаками квадрата cc и квадрата xx.

Изъ экваціи $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ можно вывести также сходное свойство съ замѣченнымъ нами въ эллипсисѣ; ибо по уничтоженіи въ ней знаменателя aa, произойдетъ $aayy = bb(ax + xx)$, и слѣд. получимъ такую пропорцію $yy : ax + xx = bb : aa$, или $(PM)^2 : AP \times PB = (DD')^2 : (AB)^2$ или $= (CD)^2 : (AC)^2$; то есть, *квадратъ ординаты къ первой оси гиперболы содержится къ произведенію* AP × PB *двухъ абсциссъ такъ, какъ квадратъ второй оси къ квадрату первой; и слѣд. квадраты ординатъ содержатся между собою, какъ произведенія сходственныхъ абсциссъ.*

Естьли оси a и b равны между собою, то эквація превращается въ $yy = ax + xx$, и кромѣ знака въ квадратѣ xx ничемъ не разнится отъ уравненія круга. Гипербола называется въ такомъ случаѣ *равнобедренною.*

Изъ уравненія $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$ происходитъ $4ac + 4cc = ap$; но поелику найдено также, что $4ac + 4cc = bb$, то слѣдуетъ заключить, что $ap = bb$. Изъ уравненія сего выходитъ $a : b = b : p$, и слѣд. па-

раметрЪ первой оси служитЪ третьимЪ пропорціональнымЪ членомЪ кЪ первой и второй оси.

260. Естьли изЪ точки D проведена будетЪ кЪ A прямая линея DA, то вЪ прямоугольномЪ треугольникѣ DCA получимЪ DA $= \sqrt{[(CD)^2 + (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$, или вставивЪ вЪ мѣсто bb величину его $4ac + 4cc$, будемЪ имѣть DA $= \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a$ = AF + CA = CF.

И такЪ для опредѣленія фокусовЪ по извѣстнымЪ осямЪ, должно перенести изЪ C кЪ F разстояніе DA; а чтобЪ сыскать вторую ось по даннымЪ фокусамЪ и первой оси, то должно прочертить изЪ точки A, какЪ изЪ центра, радіусомЪ CF дугу, пересѣкающую перпендикулярЪ DD′ вЪ какой нибудь точкѣ D.

261. ИзЪ сего явствуетЪ, что для чертежа гиперболы надобно знать всегда два количества, именно большую и меньшую ось, или большую ось и фокусы, или большую ось и параметрЪ. На примѣрЪ естьли даны будутЪ большая ось и параметрЪ, то сыскавши среднюю пропорціональную между сими двумя линеями, опредѣли вторую ось, посредствомЪ которой безЪ всякаго труда найти можешь фокусы и проч.

262. *Естьли возмешь на Mf часть MG = MF, и по проведеніи FG продолжишь изЪ точки M перпендикулярЪ MOT, то сей перпендикулярЪ будетЪ тангенсомЪ гиперболы.*

Для доказательства проведемъ къ фокусамъ изъ какой нибудь другой точки N, взятой на TM, прямыя линеи Nf и NF, а къ точкѣ G прямую NG; явствуетъ по самой конструкціи, что NF и NG равны между собою; а какъ Nf меньше $NG + Gf$, и слѣд. меньше $NF + Gf$, то и разность $Nf - NF$ должна быть меньше GF, то есть, $Mf - MF$; слѣд. точка N находится внѣ гиперболы. Такое же доказательство служитъ для всякой другой точки, взятой на TM кромѣ M.

Углы FMO и OMG равны по той же конструкціи; но уголъ OMG равенъ также противоположенному себѣ NMQ; почему $FMO = NMQ$, и слѣд. линея MF, простирающаяся къ фокусу F, составляетъ съ тангенсомъ такой же уголъ, какой дѣлаетъ съ нимъ продолженіе MQ линеи fM, которая имѣетъ направленіе къ другому фокусу.

И такъ естьли F будетъ представлять точку содержащую свѣтъ, то лучи, вышедшіе изъ нее, должны упасть по выгибу MAM' и отразиться такъ, какъ бы они произошли изъ точки f.

263. Опредѣлимъ теперь суб-тангенсъ PT. Поелику тангенсъ MT раздѣляетъ уголъ FMf на двѣ равныя части, то (*Геом.* 104) можно вывести такую пропорцію $fM : MF$

$= fT : FT$; но $fM = z + a$ (представивЪ MF чрезЪ z, какЪ было показано выше), сверхЪ того Ff или $Bf + AB + AF = a + 2c$, а линея fT или $fF - FT = a + 2c - FT$; и такЪ поставивЪ вмѣсто линей Алгебраическія ихЪ величины, получимЪ $z + a : z = a + 2c - FT : FT$; по умноженіи крайнихЪ и среднихЪ членовЪ $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$, откуда по совершеніи обыкновенныхЪ дѣйствій выведено будетЪ $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a) z}{2z + a}$; поелику же нашли мы (253) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$, слѣд. $2z + a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \ldots$ $\frac{(2c + a) 2x + (2c + a) a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a}$; по вставкѣ сихЪ величинЪ вЪ уравненіи FT, произойдетЪ $FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}$, или по уничтоженіи общаго фактора $\frac{2c + a}{a}$ будемЪ имѣть $FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$. По опредѣленіи FT не трудно опредѣлить субтансенсЪ PT, потому что $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x = \ldots$ $\frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \ldots$

$\frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; слѣд. PT $= \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$. И такъ должно заключить, что изображенiе гиперболическаго субтангенса разнится одними знаками отъ найденнаго для эллипсиса.

264. Естьли изъ PT вычтешь AP, то въ остаткѣ получишь AT разстоянiе верха отъ точки, гдѣ ось пересѣкается тангенсомъ. Разстоянiе сiе изображено будетъ чрезъ $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, а по приведенiи . . . . AT $= \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

265. По изображенiю AT можно сдѣлать нѣкоторыя замѣчанiя на кривизну гиперболы. Хотя видѣли мы выше, что каждая отрасль AM, AM′ простирается безпредѣльно; однакожъ кривизна ихъ такого роду, что всѣ тангенсы, проведенные къ каждой точкѣ сихъ безконечныхъ отраслей, пересѣкаютъ ось не далѣе, какъ на разстоянiи отъ A до C. Въ истиннѣ сего можно увѣриться слѣдующимъ образомъ. Хотя бы въ величинѣ AT вставлены были за x всѣ удобовообразимыя количества, начиная отъ o до безконечности, однакожъ AT не возрастетъ отъ o далѣе, какъ до $\frac{1}{2}a$; ибо по предположенiи x безконечнымъ количествомъ, должно знаменателя $\frac{1}{2}a + x$ почи-

тать за одно съ x; въ силу сего AT превращается въ $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$, то есть въ $\frac{1}{2}a$. И такъ тангенсъ, проведенный къ безпредѣльному концу каждой отрасли AM, AM′ долженъ пройти чрезъ центръ. А какъ противоположенныя отрасли Bm, Bm′ совершенно равны AM, AM′, и притомъ точки A и B равно удалены отъ C, то слѣдуетъ также заключить, что линеи сіи будутъ служить также тангенсами къ безпредѣльнымъ концамъ отраслей Bm, Bm′. Тангенсы такого рода представлены (*фиг.* 33) чрезъ линеи CX, CY.

266. Сіи тангенсы называются *Асимптотами* гиперболы; это такія линеи, которыя выходятъ изъ центра, приближаются непрестанно къ гиперболѣ, и соединяются съ нею на безконечномъ разстояніи.

Естьли чрезъ верхъ A (*фиг.* 32) проведена будетъ прямая линея At параллельная съ PM, то по причинѣ подобія треугольниковъ TAt, TPM получимъ TP : PM = AT : At; то есть, $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$: $At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a + x} \times \frac{\frac{1}{2}a + x}{ax + xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x}$, или вставивъ за y величину его $\frac{b}{a}\sqrt{(ax + xx)}$,

$At = \frac{\frac{1}{2} b \sqrt{(ax + xx)}}{a + x}$; величина $\frac{\frac{1}{2} b \sqrt{(ax + xx)}}{a + x}$ превращается въ $\frac{1}{2} b$, или CD, какъ скоро x принято будетъ за безконечное количество, потому что количество ax должно уничтожиться въ разсужденіи xx, а a въ разсужденіи x. Почему для опредѣленія асимптотъ должно сдѣлать слѣдующую конструкцію: поставь въ точкѣ A перпендикуляръ AL (*фиг.* 33), и продолжи его въ обѣ стороны на количество равное CD; потомъ проведи чрезъ центръ C и концы L и L′ двѣ прямыя линеи, которыя будутъ желаемыя асимптоты.

267. Для полученія изображенія CT (*фиг.* 32) должно вычесть AT изъ CA; почему $CT = \frac{1}{2} a - \frac{\frac{1}{2} ax}{\frac{1}{2} a + x} = \frac{\frac{1}{4} aa}{\frac{1}{2} a + x} = \frac{(CA)^2}{CP}$; а изъ этаго уравненія выходитъ слѣдующая пропорція CP : CA = CA : CT.

268. Изображеніе TM выходитъ изъ прямоугольнаго треугольника TPM, въ которомъ $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa}$. $(ax + xx) + \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2} a + x)^2} = [\frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2} a + x)^2 + ax + xx] \frac{(ax + xx)^2}{(\frac{1}{2} a + x)^2}$.

269. Что принадлежитъ до изображенія PI или субнормали, то можно вывести

его посредствомъ подобныхъ треугольниковъ TPM, MPI (подобныхъ по тому, что изъ прямаго угла TMI опущенъ перпендикуляръ PM), въ которыхъ TP : PM = PM : PI, или $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y = y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}$, или по причинѣ, что $y^2 = \frac{bb}{aa}.(ax + xx)$, PI $= \frac{bb}{aa}.(\frac{1}{2}a + x)$.

270. Начнемъ теперь искать уравненія посредствомъ второй оси DD′. Естьли проведемъ къ сей второй оси перпендикуляръ MP′, то назвавъ MP′, y'; DP′, x'; получимъ CP′ = MP $= y = \frac{1}{2}b - x'$; P′M = CP $= \frac{1}{2}a + x = y'$; и слѣд. $x = y' - \frac{1}{2}a$; почему вставивъ въ уравненіи $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, или $aayy = bb(ax + xx)$ за x и y найденныя теперь величины, будемъ имѣть по приведеніи $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$. Отсюда явствуетъ, что уравненіе гиперболы по второй оси не одинаково съ уравненіемъ эллипсиса, то есть, уравненія сіи не имѣютъ того сходства, какое мы видѣли въ выведенныхъ по первой оси.

271. Естьли станемъ искать уравненіе по первой оси AB, принявъ за начало абсциссъ центръ C; то представивъ CP чрезъ z, по-

лучимъ $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$, и слѣд. $x = z - \frac{1}{2}a$; вставивъ величину сію въ эквацiи $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, будемъ имѣть $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$.

Естьли нужно будетъ сыскать уравненіе по второй оси DD' съ абсциссами такого же рода; то представивъ CP' чрезъ z', получимъ $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$, и слѣд. $x' = \frac{1}{2}b - z'$; вставивъ величины сiи въ уравненiи $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$, которое нашли (270) по второй оси, будемъ имѣть $y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

272. Естьли нужда потребуетъ отнести изображенія PT, CT, PI и PM, найденныя выше, къ центру C, то стоитъ только вставить въ сихъ изображеніяхъ $z - \frac{1}{2}a$ въ мѣсто x; послѣ чего получимъ . . . . $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $(TM)^2 = (\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

Естьли линея MT продолжена будетъ до пересѣченія ея со второю осью въ T', то въ подобныхъ треугольникахъ TPM, TCT' получимъ слѣдующую пропорцію $TP : PM =$

$CT : CT'$, или $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y = \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz - \frac{1}{4}aa}$; а какъ $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$, то $CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{PM} = \frac{(CD)^2}{CP'}$; слѣд. $CP' : CD = CD : CT'$.

273. Всякая прямая линея MCM' (*фиг.* 33), проходящая чрезъ центръ C гиперболы, и касающаяся съ двухъ противныхъ сторонъ окружности ея, называется *діаметромъ* или *поперешникомъ*. Всякая прямая mO, проведенная изъ какой нибудь точки m гиперболы параллельно съ тангенсомъ къ точкѣ M, и оканчивающаяся у продолженнаго діаметра MM', называется *ордонатою* къ сему діаметру; MO и OM' абсциссами его. Мы докажемъ немедленно, что свойства ордонатъ mO въ разсужденіи діаметровъ, оканчивающихся при кривой линеи, одинаковы съ свойствами ордонатъ MP къ первой оси.

Естьли изъ точекъ m и O проведены будутъ перпендикуляры mp и OQ на ось AB, и изъ точки m линея mS параллельная съ AP, то по представленіи PM чрезъ y, CP чрезъ z, Qp чрезъ g, CQ чрезъ k, получимъ $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA =$

$CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Подобные треугольники CPM, CQO даютъ $CP : PM = CQ : QO$, то есть, $z : y = k : QO = \frac{ky}{z}$. Подобные треугольники TPM, mSO даютъ $PT : PM = mS$ или $Qp : SO$; то есть, (272) $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y = g : SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; слѣд. $mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$. Но какъ точка m принадлежитъ гиперболѣ, то должно (259), чтобъ $(pm)^2 : (PM)^2 = Ap \times pB : AP \times PB$; то есть, $(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa})^2 : yy = (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a)(z + \frac{1}{2}a)$, или $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(zz - \frac{1}{4}aa)} + \ldots \frac{ggzzyy}{(zz - \frac{1}{4}aa)^2} : yy = kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa : zz - \frac{1}{4}aa$; слѣд. умноживъ крайніе и средніе члены, и обративъ притомъ вниманіе на количества, умноженныя и раздѣленныя какъ на $zz - \frac{1}{4}aa$, такъ и на z, получимъ $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{zz - \frac{1}{4}aa} = kkyy - 2gkyy + ggyy - \frac{1}{4}aayy$, или по раскрытіи члена $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa)$, по уничтоженіи $kkyy$ и $- 2gkyy$ и по раздѣленіи

на yy, будемъ имѣть $- \frac{1}{4} \frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4} aa} = gg - \frac{1}{4} aa$ такое уравненіе, которое служитъ къ доказательству трактуемаго свойства; однако мы напередъ замѣтимъ здѣсь, что . . .

Естьли съ какой нибудь стороны центра C взята будетъ на оси AB часть CR, равная средней пропорціональной линеѣ между BP и AP, то есть такая, которой $(CR)^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4} aa$, и потомъ когда поставивъ на нее перпендикуляръ RN′, пересѣкаемый въ N′ линеею NN′, которая проходитъ чрезъ центръ C параллельно съ TM, сдѣлаешь CN = CN′, то произшедшая изъ того линея NN′ называется *сопряженнымъ діаметромъ* діаметра MM′; линея же, именуемая параметромъ діаметра MM′, состоитъ изъ третьей пропорціональной линеи къ MM′ и NN′.

Возвратимся теперь къ своему предмету, и представимъ CM чрезъ $\frac{1}{2} a'$, CN или CN′ чрезъ $\frac{1}{2} b'$, CO чрезъ z', и Om чрезъ y'. Въ подобныхъ треугольникахъ CPM, CQO получимъ CM : CP = CO : CQ, то есть, $\frac{1}{2} a' : z = z' : k$; слѣд. $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2} a'}$.

Треугольники mSO и CN′R, подобные по причинѣ параллельныхъ боковъ, даютъ CN′ : CR = $mO : mS$, или $\frac{1}{2}b' : CR = y' : g$; почему $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, и слѣд. $gg = \frac{(CR)^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, или (поелику сдѣлано $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$), $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Естьли вставимъ въ мѣсто gg и kk найденныя теперь величины ихъ въ уравненіи $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, которое выведено выше, то получимъ $-\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aa$, или (по приведеніи и раздѣленіи на $\frac{1}{4}aa$) $\frac{-z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = -\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, наконецъ по совершеніи надлежащихъ дѣйствій будемъ имѣть $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}, (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$ точно такое же уравненіе, какое вывели для первой оси.

274. Естьли сдѣлаемъ $y' = o$, то получимъ $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = o$, и слѣд. $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. По сему уравненію должно заключить, что гипербола пересѣкаетъ линею MM′ въ двухъ точкахъ M и M′, удаленныхъ отъ центра на количество равное $\frac{1}{2}a'$ или CM.

И такъ всѣ діаметры пересѣкаются въ центрѣ пополамъ.

275. Уравненіе $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, изъ котораго выводимъ $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$, то есть, двѣ величины y' съ противными знаками, показываетъ, что точка m, произходящая отъ продолженія mO равнаго Om', будетъ принадлежать кривой линеѣ; и слѣд каждой діаметръ MM' раздѣляетъ на двѣ равныя части всѣ линеи, которыя проведены будутъ параллельно съ тангенсомъ, проходящимъ чрезъ начало его M.

276. Поелику изъ той же экваціи выходитъ $a'a'y'y' = b'b'(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; то можно вывести слѣдующую пропорцію $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' = b'b' : a'a'$, или $(m\text{O})^2 : \text{MO} \times \text{OM}' = (\text{NN}')^2 : (\text{MM}')^2$, то есть, *квадратъ всякой ордонаты* mO *къ поперешнику, оканчивающемуся у кривой линеи, содержится къ произведенію* MO × OM' *двухъ абсциссъ, какъ квадратъ сопряженнаго діаметра къ квадрату того же перваго поперешника.*

277. Естьли изъ центра C опущенъ будетъ перпендикуляръ CF на TM, то въ подоб-

ныхъ треугольникахъ CFT, TPM получимъ TM : PM = CT : CF, и слѣд. $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$, а въ другихъ CRN′, TPM подобныхъ же PT : TM = CR : CN′ или CN, почему $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; изъ сихъ уравненій вывожу $CF \times CN = \ldots \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, или по составленіи квадратовъ $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; но какъ $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$, $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (273), а $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$ и $(PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$ (272), то по вставкѣ сихъ величинъ и по приведеніи будемъ имѣть $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, или $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. И такъ по продолженіи MT до точки I асимптоты, MI должна быть равна CN, что мы увидимъ ниже, а CIMN будетъ такой параллелограмъ, коего площадь = CF × MI = CF × CN; слѣд. въ какомъ бы мѣстѣ точка M не находилась, параллелограмъ CIMN будетъ всегда равенъ въ площади прямоугольнику, составленному изъ двухъ полуосей; то есть, равенъ $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, или $\frac{1}{4}ab$.

278. Въ подобныхъ треугольникахъ TPM и CRN′ получимъ TP : PM = CR : RN′;

слѣд. $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, и $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2}$ $= \frac{bbzz}{aa}$ по вставкѣ Алгебраическихъ величинъ и по приведенiи; а какъ по свойству прямоугольныхъ треугольниковъ CPM и CRN', $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, и $(CN')^2$ или $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$; то слѣд. $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$; вставивъ во второй части сего уравненiя въ мѣсто линей Алгебраическiя ихъ величины, найденныя прежде, будемъ имѣть по совершенiи надлежащаго приведенiя $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; то есть, *разность квадратовъ всякихъ двухъ сопряженныхъ дiаметровъ бываетъ всегда равна разности квадратовъ обѣихъ полуосей.*

Изъ сего должно заключить, что въ равнобедренной гиперболѣ каждой дiаметръ равенъ своему сопряженному; ибо естьли $a = b$, то $(CM)^2 - (CN)^2 = o$, и слѣд. $CM = CN$.

279. Естьли въ уравненiи $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$ вставишь въ мѣсто CR и RN' Алгебраическiя величины, то произойдетъ $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$; а какъ найдено (272), что $(TM)^2 = (\frac{bbzz}{aa} + zz$

$- \frac{1}{4} aa) \frac{zz - \frac{1}{4} aa}{zz}$, то $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4} aa}{zz} \times (CN)^2$. Въ подобныхъ треугольникахъ MPT и MP′T′ выходитъ, по составленіи квадратовъ изъ всѣхъ членовъ, такая пропорція $(PT)^2 : (TM)^2 = (P'M)^2 : (T'M)^2$, или $\frac{(zz - \frac{1}{4} aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4} aa)}{zz} = zz : (T'M)^2$; почему $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4} aa}$, а $(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, или $TM \times T'M = (CN)^2$. Представивъ параметръ діаметра MM′ чрезъ p', получимъ $2CM : 2CN = 2CN : p'$, и слѣд. $2p' \times CM = 4(CN)^2$, или $(CN)^2 = \frac{1}{2} p' \times CM$; почему $TM \times T'M = \frac{1}{2} p' \times CM$, и слѣд. $CM : TM = T'M : \frac{1}{2} p'$.

280. И такъ для опредѣленія осей гиперболы, и слѣд. для начерченія сей кривой линеи по даннымъ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и углу ихъ можно теперь изъ изъясненнаго вывести слѣдующій способъ.

Положи на MC (*фиг.* 34) линею $MH = \frac{1}{2} P'$, и изъ средины I линеи CH поставь перпендикуляръ IK, пересѣкающій въ какой нибудь точкѣ K линею MT′, проведенную изъ точки M параллельно съ сопряженнымъ діаметромъ NN′. Изъ точки K, какъ изъ центра, и радіусомъ, равнымъ разстоянію отъ K до C, опиши полкруга, пересѣкающій MT′ въ точкахъ T и T′; потомъ чрезъ точки сіи и центръ C проведи линеи TC и CT′, которыя покажутъ направленія осей. Ибо легко можно примѣтить 1е, что уголъ TCT′ будетъ прямой, потому что окружность проходитъ чрезъ точку C и поперешникомъ имѣетъ TT′; 2е, по свойству круга получимъ (*Геом.* 120) $CM : TM = T'M : MH$; а какъ притомъ MH сдѣлана $= \frac{1}{2} P'$, то будемъ имѣть также $CM : TM = T'M : \frac{1}{2} P'$.

Что касается до опредѣленія величины осей, то стоитъ только опустить изъ точки M перпендикуляры MP, MP′, и сыскать CA среднюю пропорціональную между CP и CT, равномѣрно CD′ среднюю пропорціональную между CP′ и CT′. Въ справедливости сего увѣриться можно по самымъ изображеніямъ, найденнымъ (272) для CT и CT′.

Когда извѣстные два сопряженные діаметры равны, тогда параметръ бываетъ также съ ними равенъ, и для того MH сдѣлается = MC; двѣ точки сѣченія H и C должны слиться, а MC превратиться въ тангенсъ круга; и такъ, чтобъ получить центръ K, стоитъ только поставить на CM перпендикуляръ въ точкѣ C.

О Гиперболѣ, разсматриваемой между ея Асимптотами.

281. Гипербола, разсматриваемая относительно къ своимъ асимптотамъ, имѣетъ нѣкоторыя полезныя свойства. Предлагая ихъ, припомнимъ здѣсь напередъ, какъ асимптоты опредѣляются (*Смотри* 266).

Мы намѣрены относить каждую точку E Гиперболы (*фиг.* 35) къ двумъ асимптотамъ CLO, CL′o; и потому проведши изъ E линею EQ параллельно къ какой нибудь асимптотѣ, будемъ искать, какое отношеніе имѣютъ между собою линеи EQ и CQ.

Для опредѣленія отношенія сего, проведемъ изъ точки E параллельную линею OEo со второй осью DD′ и E′S параллельную съ

CLO, а изъ верху A линею AG параллельную съ CL'o. Потомъ положивъ $CA = \frac{1}{2}a$, CD или AL или $AL' = \frac{1}{2}b$; $CP = z$, $PE = y$, $AG = m$, $GL = n$, $CQ = t$, $QE = u$; въ подобныхъ треугольникахъ CPO, CAL получимъ $CA : AL = CP : PO$ или $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, или $a : b = z : PO = Po = \frac{bz}{a}$; слѣд. $EO = \frac{bz}{a} - y$, а $Eo = \frac{bz}{a} + y$; почему $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$ (по вставкѣ величины $\frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$ равной yy и по приведенiи); то есть, $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$. Свойство сiе принадлежитъ всякой точкѣ гиперболы, потому что E взята произвольно.

282. Изъ подобiя треугольниковъ QEO, ESo и AGL выходитъ $AL : AG = EO : EQ$ и $AL : GL = Eo : ES$; умножь обѣ сiи пропорцiи по порядку, такъ чтобъ извѣстная величина $EO \times Eo$ могла вытти въ новой, и ты получишь $(AL)^2 : AG \times GL = EO \times Eo : EQ \times ES$, то есть, $\frac{1}{4}bb : mn = \frac{1}{4}bb : ut$; слѣд. $ut = mn$ (по причинѣ равенства предъидущихъ членовъ пропорцiи), представляетъ эквацiю, принадлежащую гиперболѣ между ея асимптотами. И такъ во всякой точкѣ E гиперболы $EQ \times ES$ или $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Естьли предположено будетъ, что точка E упадаетъ въ A, то CQ обращается въ такомъ случаѣ въ CG, и QE въ AG; почему $CG \times AG = AG \times GL$, и слѣд. $CG = GL$. А какъ точка G представляетъ по такому равенству середину CL, то должно заключить, что $CG = AG = GL$, потому что окружность описаннаго полкруга на CL, какъ на діаметрѣ и слѣд. радіусомъ CG, должна неминуемо пройти чрезъ точку A по причинѣ прямаго угла A или CAL; почему m будетъ $= n$, и $ut = m^2 = (CG)^2$.

Сей непремѣняющійся квадратъ m^2 или $(CG)^2$, которому произведеніе ut или $CQ \times QE$ всегда равно, называется *степенью* гиперболы.

283. Изъ доказаннаго свойства можно вывести слѣдующее другое: *прямая линея* REr, *проведенная всячески чрезъ какую нибудь точку* E *гиперболы къ обѣимъ асимптотамъ ея, дѣлаетъ равныя части* RE, *mr*, *заключающіяся между кривою и асимптотами.*

Ибо по проведеніи чрезъ точку m линеи hmH параллельной съ OEo, въ подобныхъ треугольникахъ REO и RmH получимъ $ER : Rm = EO : Hm$, а въ подобныхъ треугольникахъ rhm,

roE, $Er : mr = Eo : mh$; умноживЪ члены сихЪ пропорцій по порядку, выведемЪ $ER \times Er : Rm \times rm = EO \times Eo : Hm \times mh$; а какЪ каждое изЪ произведеній $EO \times Eo$ и $Hm \times hm$ равно $(CD)^2$ (282), то слѣд. $ER \times Er = Rm \times mr$, или $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; наконецЪ сдѣлавЪ надлежащія умноженія и уничтоживЪ вЪ обѣихЪ частяхЪ $ER \times mr$, будемЪ имѣть $ER \times Em = Em \times mr$, слѣд. $ER = mr$.

284. ИзЪ сего должно заключить, что всякой тангенсЪ Tt гиперболы, оканчивающійся при асимптотахЪ, раздѣляется на двѣ равныя части вЪ точкѣ прикосновенія M.

285. Естьли чрезЪ точку M проведешь IMi параллельную сЪ DD', а чрезЪ точку E линею REr параллельную сЪ тангенсомЪ Tt, то вЪ подобныхЪ треугольникахЪ TMI сЪ REO и Mit сЪ Eor получишь двѣ слѣдующія пропорціи $TM : MI = RE : EO$, и Mt или $TM : Mi = Er : Eo$, умноживЪ члены сихЪ пропорцій по порядку, будешь имѣть $(TM)^2 : MI \times Mi = RE \times Er : EO \times Eo$; но каждое изЪ произведеній $MI \times Mi$ и $EO \times Eo$ равно $(CD)^2$; слѣд. $(TM)^2 = RE \times Er$.

286. ДіаметрЪ CMV, проведенный изЪ центра C, раздѣляетЪ линею Rr параллель-

вую съ Tt на двѣ равныя части; потому что сей діаметръ проходитъ (284) чрезъ середину M тангенса Tt; и такъ положивъ $CM = \frac{1}{2}a'$, $TM = \frac{1}{2}q$, $CV = z'$; ордонату $VE = y'$, будешь имѣть въ подобныхъ треугольникахъ CMT, CVR, $CM : MT = CV : VR$, то есть, $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$ или $a' : q = z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; слѣд. $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, и $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; а какъ $RE \times Er = (TM)^2 = \frac{1}{4}qq$, то $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; притомъ же (273) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; слѣд. по вставкѣ сей величины, получишь $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, или $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq - b'b')$, или $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = o$, или $(qq - b'b')(\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}) = o$; по раздѣленіи на $\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, выходитъ уравненіе $qq - b'b' = o$, а изъ сего $q = b'$; или $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, то есть, $MT = CN$; но CN представляетъ сопряженной полупоперешникъ діаметра CM; и слѣд. сдѣланное предложеніе (277) теперь доказано. Почему MI (*фиг.* 33) $= CN$.

287. Слѣд. для всякой прямой линеи REr параллельной съ сопряженнымъ діамет-

ромъ CN (*фиг.* 35) служитъ тоже уравненіе $RE \times Er = (CN)^2$.

288. Отсюда легко можно вывести способъ, какъ по извѣстнымъ сопряженнымъ діаметрамъ CM, CN (*фиг.* 36) и углу ихъ чертить гиперболу, находя попеременно разныя ея точки. Въ самомъ дѣлѣ изъ сказаннаго (284 и 286) явствуетъ, что естьли продолживъ изъ начала M полупоперешника CM линею TM*t* параллельно съ CN, возмешь съ обѣихъ сторонъ точки M, части MT, M*t* равныя CN и потомъ чрезъ центръ C проведешь линеи CT и C*t*, то линеи сіи представятъ собою асимптоты. Изъ тогожъ, что доказано (283), явствуетъ, что естьли продолживъ произвольно чрезъ точку M прямыя PMQ, PMQ, сдѣлаешь по изъясненному выше PO = MQ, то всѣ точки O, найденныя такимъ образомъ, будутъ принадлежать гиперболѣ. Посредствомъ точекъ O можно опредѣлить множество другихъ, такихъ на примѣръ, какъ V, V и проч. проведя прямыя ROS, ROS и сдѣлавъ SV = RO.

289. Явствуетъ также изъ сего, какимъ образомъ должно начертить такую гиперболу, которая бы прошла чрезъ данную точку, заключающуюся между извѣстными асимптотами.

290. Наконецъ естьли раздѣлишь уголъ, состоящій изъ асимптотъ, и его дополненіе по поламъ, то получишь въ раздѣляющихъ линеяхъ направленіе двухъ осей, коихъ величины опредѣлили по объявленному (280), и слѣд. отсюда можно вывести другой способъ для рѣшенія вопроса, содержащагося въ томъ мѣстѣ.

О Параболѣ.

291. Приступимъ наконецъ разсматривать свойства кривой линеи, которой каждая точка удалена отъ неподвижной F (*фиг.*

37) на разстояніе равное отъ прямой данной линеи XZ; то есть свойства такой кривой линеи, въ которой бы, естьли изъ каждой ея точки M проведены будутъ къ извѣстной XZ перпендикуляры MH, произходило всегда MF = MH.

Проведи изъ точки F на XZ перпендикуляръ FV, и раздѣли его на двѣ равныя части въ A; точка A будетъ принадлежать кривой линеи такого рода, потому что AV = AF; сія точка называется *верхомъ*.

Для показанія свойствъ сей кривой линеи, которая называется *параболою*, сыщемъ такое уравненіе, которое бы представило отношеніе между перпендикулярами MP опущенными на FV и ихъ разстояніями AP отъ точки A. Положимъ AV или AF $= c$, AP $= x$, PM $= y$; слѣд. VP = AV + AP $= c + x =$ MH; а какъ MF = MH, то произойдетъ также MF $= c + x$, притомъ FP = AP — AF $= x - c$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ FPM получимъ $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, то есть, $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; по переставкѣ членовъ и по приведеніи $yy = 4cx$. Таково уравненіе параболы, и вотъ чему оно насъ научаетъ.

1^e. Изъ сего уравненія выходитъ $y = \pm \sqrt{(4cx)}$, слѣд. должно заключить, что для одной величины AP или x, находится двѣ равныя въ y или PM; но какъ одна изъ послѣднихъ величинъ положительная, а другая отрицательная, то онѣ должны упадать съ противныхъ сторонъ неопредѣленной линеи API, которая называется *осью*, то есть, величины сіи будутъ состоять изъ PM и PM′; слѣд. парабола имѣетъ двѣ отрасли или два бедра AM, AM совершенно между собою равныя, простирающаяся безпредѣльно; ибо ясно можно видѣть, что чѣмъ x становится больше, тѣмъ количество $\sqrt{(4cx)}$ и слѣд. y увеличивается.

2^e. Естьли x сдѣлаешь отрицательнымъ, то произойдетъ $y = \pm \sqrt{(-4cx)}$, то есть, количество умственное; слѣд. кривая линея не можетъ простираться выше точки A.

3^e. Естьли для полученія ордонаты, проходящей чрезъ точку F, которая называется *фокусомъ*, сдѣлаешь $x = c$, то получишь $y = \pm \sqrt{(4cc)} = \pm 2c$, то есть, $Fm'' = 2c$, и слѣд. $m''m''' = 4c$. Сія линея, проходящая чрезъ фокусъ, называется *параметромъ* параболической оси. И такъ *параметръ параболической оси въ чет-*

веро больше разстоянія AF *отъ верху фокуса.*

4^e. Почему названъ параметръ p, получимъ $4c = p$; и слѣд. параболическая эквація перемѣнится въ $yy = px$.

292. По найденному уравненію для параболы, можно начертить сію кривую линею точками вопервыхъ такъ: именно положивъ поперемѣнно за x разныя многія величины, опредѣли по онымъ соотвѣтственныя величины y.

293. Можно еще начертить ее точками слѣдующимъ образомъ: выбери произвольно точку A за верхъ параболы и проведи неопредѣленно линею TVI, которая должна служить направленіемъ оси, и положи части AV, AF равныя $\frac{1}{4}p$, точка F будетъ представлять фокусъ; потомъ поставивъ къ оси множество неопредѣленной величины перпендикуляровъ MM′, засѣки ихъ съ обѣихъ сторонъ изъ точки F, какъ центра и радіусомъ равнымъ разстоянію VP, дугами въ точкахъ M и M′; точки сіи будутъ принадлежать параболѣ, потому что FM, которую сдѣлали равною VP, будетъ равна MH по продолженіи прямой XVH перпендикулярно къ оси. Сія прямая линея XVH называется *правиломъ*.

294. Наконецъ можно описать параболу чрезъ непрерывное движеніе посредствомъ наугольника VHf такимъ образомъ: привяжи однимъ концомъ нитку равной длины съ fH къ краю f какого нибудь бока наугольника, а другой конецъ ея прикрѣпи въ точкѣ F; потомъ приложивъ посредствомъ стиля часть нитки къ боку наугольника fH, и придерживая ее вездѣ плотно, подвигай другой бокъ наугольника вдоль ZX; стиль M при семъ движеніи начертитъ параболу MA.

295. Изъ уравненія $yy = px$ замѣчаемъ, что *во всякой точкѣ* M *квадратъ*

ордонаты MP равняется произведенію сходственной абсциссы на параметрЪ.

По тому же уравненію заключаемЪ, что квадраты yy ордонатЪ содержатся между собою, какЪ абсциссы x; то есть, $(PM)^2 : (pm)^2 = AP : Ap$; ибо $(PM)^2 = p \times AP$ и $(pm)^2 = p \times Ap$; и такЪ $(PM)^2 : (pm)^2 = p \times AP : p \times Ap = AP : Ap$ по раздѣленіи последняго содержанія на p.

Найденная (222) эквацїя для эллипсиса была такова $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$; естьли большая его ось a предположена будетЪ безконечною, то xx вЪ такомЪ случаѣ должно уничтожиться, какЪ количество неспособное уменьшить ax, по той же причинѣ $4cc$ должно уничтожено быть вЪ разсужденіи $4ac$, и слѣд. уравненїе превратится вЪ $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aacx}{aa}$, то есть, вЪ такое уравненїе $yy = 4cx$, которое приличествуетЪ параболѣ. Почему *парабола есть такой эллипсисЪ, коего большая ось безконечна.*

296. Естьли по соединеніи точекЪ F и H прямою линеею FH, проведешь кЪ ней изЪ точки M перпендикулярЪ MOT, то перпендикулярЪ сей будетЪ служить тангенсомЪ параболѣ.

Для доказательства продолжи изЪ какой нибудь другой точки N сего тангенса NF, NH и линею NZ перпендикулярную кЪ XZ Естьли точка N иная, а не M должна

лежать также на кривой линеѣ, то должно вЪ такомЪ случаѣ, чтобЪ NF = NZ; но NZ меньше линеи NH, которая по конструкціи равна NF.

297. УголЪ FMO по той же конструкціи равенЪ OMH, а сей равенЪ противуположенному себѣ fMN; слѣд. FMO равенЪ также fMN.

И такЪ лучи свѣта вышедши изЪ точки F и упавЪ по изгибу MAM′, должны отразиться всѣ параллельно сЪ осью; и обратно лучи, ударяющіе на излучину MAM′ параллельно сЪ осью, должны собраться вЪ фокусЪ F.

298. Поелику MH параллельна сЪ VP, то треугольники HOM, TOF подобны, и при томЪ они равны, потому что HO = OF; отсюда явствуетЪ, что FT = MH = PV $= x + c$, и слѣд. $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; то есть, *субтангенсЪ* PT *параболы вдвое больше абсциссы* AP.

299. Естьли изЪ точки M проведешь кЪ тангенсу TM перпендикулярЪ MI, то вЪ подобныхЪ треугольникахЪ TPM, PMI получишь TP : PM = PM : PI, то есть, $2x : y = y : PI = \frac{yy}{2x}$, или (по причинѣ, что $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. И такЪ *сибнормаль параболы остается вЪ каждой*

точкѣ одинакова и равна полу-параметру.

300. Отсюда явствуетъ, что по извѣстнымъ абсциссѣ и ордонатѣ, относящимся къ какой нибудь точкѣ M параболы не трудно опредѣлить параметръ ея слѣдующимъ образомъ. Положи PT = 2AP, и проведи изъ точки T линею TM, которая (268) представитъ тангенсъ; поставь изъ точки M къ сему тангенсу перпендикуляръ MI, которой опредѣлитъ (299) на продолженной AP часть PI равную полупараметру.

301. Всякая линея MX (*фиг.* 38), проведенная изъ точки M параболы параллельно съ осью AQ, называется *діаметромъ*; у каждаго діаметра находится свой параметръ, которой состоитъ изъ учетвереннаго разстоянія MF отъ начала того же поперещника къ фокусу. Всякая прямая линея *m*O, продолженная изъ точки *m* параболы параллельно съ тангенсомъ TM, которой проходитъ чрезъ начало или верхъ M діаметра, называется *ордонатою* къ сему діаметру. Мы покажемъ теперь, что ордонаты, проведенныя къ какому нибудь поперешнику, имѣютъ одинакія свойства съ ордонатами къ оси.

Проведемъ ордонату MP къ оси, и изъ точекъ *m* и O параллельныя съ нею *mp*, OQ, напослѣдокъ изъ точки *m* продолжимъ *m*S параллельную съ осью. Положимъ AP = x, PM

$= y$, $Qp = g$, $AQ = k$, и слѣд. $Ap = k - g$. Въ подобныхъ треугольникахъ TPM, mSO получимъ TP : PM $= mS$: SO, то есть, $2x : y = g : SO = \frac{gy}{2x}$; слѣд. $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; а какъ точка m принадлежитъ параболѣ, то должно (295), чтобъ $(pm)^2 : (PM)^2 = Ap : AP$, то есть, $(y - \frac{gy}{2x})^2 : yy = k - g : x$, или $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy = k - g : x$; слѣд. по умноженіи крайнихъ и среднихъ членовъ будемъ имѣть такое уравненіе $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, которое превратится (по раздѣленіи и уничтоженіи одинакихъ членовъ въ обѣихъ его частяхъ) въ $x + \frac{gg}{4x} = k$, или въ $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Представимъ теперь абсциссу MO чрезъ x', а ордонату mO чрезъ y'; отъ чего произойдетъ $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; слѣд. $x' = k - x$, и $\frac{gg}{4x} = x'$ или $gg = 4xx'$. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ mSO, $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$, то есть, $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$; слѣд. вставивъ вмѣсто gg величину его $4xx'$, а вмѣсто yy величину px, будемъ имѣть по совершеніи надлежащаго

приведенія $4xx' + px' = y'y'$, или $(4x + p)\,x' = y'y'$. Естьли наконецъ представимъ чрезъ p' параметръ діаметра MX, то получимъ $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$, и напослѣдокъ $p'x' = y'y'$. Отсюда явствуетъ, что діаметральное уравненіе ничемъ не разнится отъ того, какое вывели мы выше для оси. И такъ *квадратъ ордонаты то ко всякому поперешнику параболы равенъ произведенію абсциссы на параметръ того же діаметра; и квадраты ордонатъ ко всякому параболическому діаметру содержатся между собою, какъ сходственныя абсциссы.*

302. Естьли пожелаешь описать параболу, имѣющую поперешникомъ линею MX неопредѣленной величины, а параметромъ его данную линею p', притомъ такія ордонаты, которыя съ тѣмъ же поперешникомъ составляютъ извѣстной уголъ; то поступая по вышеизъясненному, проведи чрезъ начало M линею NMT, составляющую съ MX уголъ NMX равный данному углу. Изъ той же точки M продолжи линею MF, которая бы съ MT дѣлала также уголъ FMT равный NMX; положи $MF = \frac{1}{4}p'$, точка F будетъ въ такомъ случаѣ (297 и 301) параболической фокусъ; проведи чрезъ F неопредѣленной величины линею TFQ параллельно съ MX и пересѣкающую TM въ T: сія линея покажетъ направленіе оси, которой верхъ A опредѣли, опустивъ на нее перпендикуляръ MP и раздѣливъ PT по поламъ въ точкѣ A (298). Послѣ чего по извѣстному фокусу и верху параболы начерти ее (293 и 294).

303. Три кривыя линеи, которыя разсматривали мы поперемѣнно, названы количе-

скими сѣченіями потому, что мы ихъ въ самомъ дѣлѣ получаемъ разсѣкая конусъ плоскостью нѣкоторыми извѣстными образами. На примѣръ эллипсисъ AMmB (*фиг.* 39) произходитъ отъ разсѣченія конуса CHI такою плоскостью, которая прорѣзываетъ бока его CH, CI накось ниже верха C; надлежитъ изключить отсюда одинъ тотъ случай, когда сія плоскость дѣлаетъ съ бокомъ CI такой же уголъ, какой составляетъ другой бокъ CH съ основаніемъ HI; въ семъ случаѣ сѣченіе представляетъ кругъ.

Когдажъ напротивъ разсѣкающая плоскость проходитъ чрезъ одинъ бокъ CI конуса, и встрѣчается съ другимъ CH на продолженіи выше верха C, тогда изъ такого сѣченія выходитъ гипербола AMm (*фиг.* 40).

Наконецъ получаемъ параболу, разсѣкая конусъ такою плоскостью, которая параллельна съ какимъ нибудь бокомъ его CH (*фиг.* 41). Вотъ тому доказательство.

Вообразимъ конусъ CHI (*фиг.* 39 и 40) разсѣченнымъ такою плоскостью, которая проходитъ по прямой линеи, соединяющей верхъ его C съ центромъ круга основанія, то есть, такою плоскостью, которая проходитъ по оси конуса; такое сѣченіе про-

изведетъ треугольникъ. Разрѣжемъ теперь тотъ же конусъ тремя новыми плоскостями AMm, FMG, HmI, изъ которыхъ бы каждая была перпендикулярна къ треугольнику, а двѣ послѣднія и параллельны съ основаніемъ конуса. Два сѣченія FMG, HmI произведутъ (*Геом.* 199) круги, которыя повстрѣчаются съ сѣченіемъ AMm въ M и m. Пересѣченія FG, HI круговыхъ плоскостей съ треугольникомъ по оси, будутъ діаметры тѣхъ же круговъ. Сѣченія PM, pm круговъ съ плоскостью AMm будутъ (*Геом.* 190) изображать какъ перпендикуляры къ плоскости треугольника по оси, такъ равно и ордонаты круговъ и сѣченія AMm.

По предположеніи сего въ подобныхъ треугольникахъ APG съ ApI и BFP съ BHp получимъ слѣдующія двѣ пропорціи $AP : Ap = PG : pI$ и $BP : pB = FP : Hp$; умноживъ члены обѣихъ сихъ пропорцій по порядку выведемъ $AP \times BP : Ap \times pB = PG \times FP : pI \times Hp$; а какъ по свойству круга $FP \times PG = (PM)^2$ и $Hp \times pI = (pm)^2$, то слѣд. $AP \times PB : Ap \times pB = (PM)^2 : (pm)^2$. Изъ сего явствуетъ, что квадраты ордонатъ сѣченія AMm содержатся между собою, какъ произведенія абсциссъ; поелику же абсциссы сіи находятся въ *фигурѣ* 39 съ разныхъ сто-

ронѣ ордонаты, а въ *фиг.* 40 падаютъ онѣ съ одной стороны, то слѣдуетъ заключить, что АМm (*фиг.* 39) представляетъ эллипсисъ, а (*фиг.* 40) гиперболу.

Что касается до *фигуры* 41, то по допущеніи въ ней тѣхъ же вещей, какія употреблены были въ двухъ прежнихъ, получимъ по свойству круга $(PM)^2 = FP \times PG$ и $(pm)^2 = Hp \times pI$, или (по причинѣ параллельныхъ Pp съ FH и FP съ Hp, между которыми $FP = Hp$) $(pm)^2 = FP \times pI$; слѣд. $(PM)^2 : (pm)^2 = FP \times PG : FP \times pI = PG : pI = AP : Ap$ по причинѣ подобныхъ треугольниковъ APG, ApI; и такъ усматривая въ сей пропорціи, что квадраты ордонатъ содержатся между собою, какъ абсциссы, заключаемъ о кривой линеѣ АМm, что она парабола.

Разсужденія объ Уравненіяхъ Коническихъ сѣченій.

304. Слѣдуетъ изъ доказаннаго (245), что по представленіи въ эллипсисѣ абсциссы CO (*фиг.* 30), взятой отъ центра на поперешникѣ MM' чрезъ x, а ордонаты mO параллельной съ сопряженнымъ діаметромъ CN чрезъ y, можно вывести для сего поперешника, какой бы впрочемъ ни заключался

уголъ между обоими ими, слѣдующее уравненіе $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. Естьли чрезъ точку m проведешь mO параллельно съ MM', которая будетъ служить въ такомъ случаѣ ордонатою діаметру NN', то положивъ $CO' = x'$, а $mO' = y'$, получимъ $y = x'$, а $x = y'$, и слѣд. предыдущая эквація превратится въ $x'x' = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - y'y')$; отсюда выходитъ $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - x'x')$. То есть, уравненіе для діаметра сохраняетъ всегда одинакой видъ, пока абсциссы будутъ принимаемы отъ центра, а ордонаты параллельны съ сопряженнымъ діаметромъ.

Когда количество b случится равно a, тогда уравненіе превращается въ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, которое, какъ мы видѣли (221), относится къ кругу. Однако должно примѣчать, что въ такомъ уравненіи ордонаты предполагаются перпендикулярными къ діаметру; естьли же онѣ сдѣлаютъ какой нибудь другой уголъ не прямой, то та же эквація $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ будетъ принадлежать эллипсису, въ которомъ сопряженные діаметры равны.

Естьли въ гиперболѣ назовемъ x абсциссу CO (*фиг.* 33), взятую отъ центра діа-

метра MM′, оканчивающагося при кривой линеѣ, а y ордонату mO параллельную съ сопряженнымъ діаметромъ NN′, то какой бы не былъ уголъ между сопряженными діаметрами, получимъ (273) для поперешника MM′ такое уравненіе $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$. Когда же по проведеніи чрезъ точку m' линеи $m'O'$ параллельной съ діаметромъ CM, представимъ чрезъ y' линею $m'O'$, которая въ такомъ случаѣ будетъ служить ордонатою діаметру NN′, а чрезъ x' абсциссу CO′, то произойдетъ $x' = y$, а $y' = x$; и слѣд. прежнее уравненіе перемѣнится въ $x'x' = \frac{bb}{aa} \cdot (y'y' - \frac{1}{4}aa)$, изъ котораго выходитъ $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$. Отсюда явствуетъ, что эквація, относящаяся къ сопряженному діаметру NN′ не такова уже, какую нашли мы для діаметра MM′, оканчивающагося при кривой линеѣ.

Что принадлежитъ до параболы, то мы видѣли (301), что по принятіи абсциссъ на какомъ нибудь діаметрѣ отъ начала его, и по допущеніи ордонатъ параллельными съ тангенсомъ, проведеннымъ къ верху того же діаметра, эквація выходитъ всегда такая $yy = px$, въ которой y представляетъ

ордонату, x абсциссу, а p параметрЪ діаметра.

НаконецЪ естьли по принятіи абсциссЪ вЪ гиперболѢ, разсматриваемой относительно кЪ асимптотамЪ ея, отЪ центра одной изЪ сихЪ асимптотЪ, и по допущеніи ордонатЪ параллельными сЪ другою, представимЪ первыя чрезЪ x, вторыя чрезЪ y, а степень гиперболы чрезЪ a, то гиперболическое уравненіе вЪ такомЪ видѢ будетЪ $xy = aa$.

305. Однако должно твердо помнить, что сіи уравненія тогда только могутЪ относиться кЪ означеннымЪ нами теперь линеямЪ, когда одна изЪ неопредѢленныхЪ, на примѢрЪ y будетЪ считаться отЪ той же линеи, на которой щетЪ свой имѢютЪ x; ибо изЪ эллипсическихЪ или гиперболическихЪ уравненій могутЪ быть такія, которыя не относясь кЪ сопряженнымЪ діаметрамЪ, а параболическое не показывая никакой взаимности между абсциссами и тѢмЪ, что мы доселѢ называли *ордонатами*, представляютЪ со всемЪ тѢмЪ одинакой видЪ сЪ изслѢдованными выше. На примѢрЪ положимЪ, что CM′ и CN (*фиг.* 42) представляютЪ два сопряженные полупоперешника вЪ эллипсисѢ, для которыхЪ дана была бы та-

кая эквація $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, гдѣ CM′ $= \frac{1}{2}a$, CN $= \frac{1}{2}b$, CQ $= x$, и QM $= y$; и такъ естьли чрезъ центръ C проведешь прямую линею FCE неопредѣленной величины, пересѣкающую ордонату QM въ E, коей часть CE изобразится чрезъ z, потомъ чрезъ точку B, взятую на извѣстномъ разстояніи BC $= m$, продолжишь BF параллельно съ QM, и CF изобразится чрезъ n, то въ подобныхъ треугольникахъ CBF, CQE получишь $m : n = x : z$, слѣд. $x = \frac{mz}{n}$; по вставкѣ сей величины x въ предыдущемъ уравненіи, оно перемѣнится въ $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - \frac{mmzz}{nn})$, или $aannyy = \frac{1}{4}aabbnn - bbmmzz$, или наконецъ въ $yy = \frac{bbmm}{aann}(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz)$, уравненіе, имѣющее одинакой видъ съ первымъ; но которое, какъ явствуетъ, не можно справедливо почитать за принадлежащее сопряженнымъ діаметрамъ; ибо абсциссы z взяты на CE, а ордонаты y или QM имѣютъ свой щетъ отъ точки Q, гдѣ линея EM параллельная съ CN пересѣкаетъ CM′.

306. И такъ заключимъ вообще, 1° что эквація второй степени съ двумя неопредѣленными количествами x и y, изъ

которыхъ одно считается отъ той же линеи, на которой щетъ свой ведетъ и другое, принадлежитъ эллипсису относительно къ сопряженнымъ діаметрамъ его, или кругу тогда, когда въ семъ уравненіи не будетъ, кромѣ квадратовъ x и y другихъ степеней, и притомъ квадраты x и y будутъ стоять въ разныхъ частяхъ уравненія съ противными знаками, а извѣстное количество, находящееся въ одной части съ квадратомъ, имѣющимъ знакъ —, будетъ само съ +. Въ противномъ случаѣ такое на примѣръ уравненіе $yy = \frac{bb}{aa} \left(- \frac{1}{4} aa - xx \right)$ не изъобразитъ никакой возможной линеи, потому что оно выводитъ $y = \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{aa} \left(- \frac{1}{4} aa - xx \right)\right]}$ неизвлекаемое количество.

307. 2°. Когда каждый изъ квадратовъ yy и xx перенесенъ будучи въ разныя части уравненія, останется съ одинакимъ знакомъ, и притомъ не будетъ другихъ степеней x и y, кромѣ ихъ квадратовъ; тогда такое уравненіе принадлежитъ всегда гиперболѣ относительно къ діаметру, оканчивающемуся при кривой линеѣ или къ его сопряженному, глядя по извѣстному члену, съ какимъ онъ стоитъ знакомъ, съ противнымъ

или одинакимъ въ разсужденіи квадратовъ xx и yy.

308. 3^e. Уравненіе, заключающее въ себѣ квадратъ одного только неопредѣленнаго количества, и состоящее изъ двухъ членовъ, изъ которыхъ второй представляетъ произведеніе другаго неопредѣленнаго на извѣстное количество, принадлежитъ параболѣ относительно къ діаметрамъ ея тогда, когда оба сіи члена, поставленные въ разныхъ частяхъ уравненія, будутъ находиться съ одинакимъ знакомъ; когдажъ съ разными, тогда уравненіе не изображаетъ никакой возможной линеи.

309. Наконецъ уравненіе, заключающее въ себѣ два члена, изъ которыхъ одинъ состоитъ изъ произведенія двухъ неопредѣленныхъ x и y, а другой изъ извѣстнаго количества, изображаетъ всегда гиперболу относительно къ асимптотамъ ея.

310. Таковы суть уравненія коническихъ сѣченій, которыя относятся къ различнымъ линеямъ, изслѣдованнымъ нами. Мы увидимъ употребленіе ихъ ниже; а теперь не безполезно предувѣдомить, что по всякому уравненію съ двумя неопредѣленными x и y, заключающему въ себѣ предло-

женныя условія, можно удобно сдѣлать конструкцію въ такомъ коническомъ сѣченіи, которому оно будетъ принадлежать, поступая по слѣдующему примѣру.

Пусть будетъ дано для конструкціи такое уравненіе $ncd - qyy = gxx$. Напиши его такъ $qyy = ncd - gxx$, потомъ раздѣливъ вторую часть на g и представивъ умноженіе на тоже g въ показаніи, изобрази чрезъ $qyy = g\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$, и наконецъ чрезъ $yy = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$; но уравненіе въ семъ видѣ (243 и 245) принадлежитъ эллипсису, котораго содержаніе квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ есть $\frac{g}{q}$, а квадратъ того изъ поперешниковъ, на которомъ *x* щетъ свой имѣютъ, представляется чрезъ $\frac{4ncd}{g}$. Въ самомъ дѣлѣ сравнивъ эту эквацію съ $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, получишь $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, а $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$. По симъ уравненіямъ выведи $a = \sqrt{\left(\frac{4ncd}{g}\right)}$ и $b = \sqrt{\left(\frac{4ncd}{q}\right)}$, чрезъ что опредѣлишь оба сопряженные діаметра. Что касается до угла, которой долженъ заключаться между поперешниками, то онъ будетъ тотъ же, какой содержится между линеями x и y; уголъ же сей предполагается извѣстнымъ по самой задачѣ, изъ которой выведено уравненіе $ncd - qyy = gxx$. Но мы видѣли (252), какимъ образомъ по извѣстнымъ тремъ количествамъ такого рода описывается эллипсисъ.

Такимъ же образомъ поступать должно съ экваціями прочихъ коническихъ сѣченій, когда онѣ будутъ относиться къ какимъ

нибудь предложеннымЪ выше. Мы увидимЪ, что вообще всякое уравненіе второй степени сЪ двумя неопредѣленными изображаетЪ всегда коническое сѣченіе, или не изображаетЪ никакой возможной линеи (*); это доказывается тѣмЪ, что всякое уравненіе такого роду можетЪ представлено быть вЪ видѣ нѣкотораго изЪ изслѣдованныхЪ. Мы намѣрены теперь показать способЪ, какЪ приводить ихЪ вЪ такой видЪ; а чтобЪ болѣе придать ясности употребленію сего способа и производимымЪ по оному конструкціямЪ, то помѣстимЪ напередЪ слѣдующія разсужденія.

311. Поелику изЪ всякой задачи, разрѣшаемой Алгебраически, выводится всегда одно или многія уравненія, то всякое уравненіе сЪ двумя неопредѣленными u и t можно почитать за такое, которое вышло изЪ извѣстной задачи, вЪ которой оба сіи неопредѣленные представляли неизвѣстныя ко-

(*) Надобно исключить отсюда одинЪ только случай, гдѣ уравненіе выходитЪ изЪ произведенія двухЪ факторовЪ первой степени, такихЪ на примѣрЪ, какЪ $ax + by + c$ и $dx + fy + g$; такое уравненіе не можетЪ по справедливости почестыся здѣсь дѣйствительно второй степени; но какЪ сей случай ни кЪ чему не служитЪ, що мы его оставляемЪ.

личества; уравненіе сіе, какого бы рода не была задача, можно принимать всегда изображающимъ свойство кривой линеи; въ этомъ не трудно увѣриться, потому что положивъ произвольно за какое нибудь изъ неизвѣстныхъ, на примѣръ за *u*, многія поперемѣнно величины, можно вычислить при всякомъ случаѣ помощію той же экваціи и Алгебраическихъ правилъ величину *t*. Отсюда явствуетъ, что ничто не препятствуетъ означать на неопредѣленной линеѣ AR (*фиг.* 42, 43 и 44) величинѣ AP, AP и проч., принятыхъ за *u*, проводить чрезъ точки P, P и проч. линей PM, PM и проч., параллельныхъ между собою и подъ опредѣленнымъ угломъ, и дѣлать сіи послѣднія равными соотвѣтственнымъ величинамъ, найденнымъ для *t*; стезя точекъ M, M и проч., опредѣленныхъ такимъ образомъ, представитъ кривую линею, которой свойство должно зависѣть отъ взаимнаго отношенія линей AP и PM; а какъ отношеніе сіе изображается въ той же экваціи, изъ которой выведены самыя линеи, то она же должна изображать и натуру кривой линеи.

319. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ можно представить всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными

въ такомъ видѣ, какой приличенъ коническимъ сѣченіямъ относительно къ линеямъ (304).

313. Но чтобъ быть въ состояніи поступать по способу, которой мы намѣрены предложить, то должно напередъ умѣть уничтожать второй членъ въ уравненіи второй степени. Правило этого дѣйствія весьма просто. Надлежитъ по уничтоженіи въ квадратѣ неизвѣстнаго множителя или дѣлителя его приравнять неизвѣстное усугубленное (или уменьшенное, когда второй членъ будетъ съ знакомъ —) половиною коеффиціента или множителя x во второмъ членѣ къ новому неизвѣстному.

На примѣръ для уничтоженія втораго члена въ слѣдующей экваціи $4x^2 + 12x = 9$, дѣлю всѣ члены ея на 4 и получаю $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; дѣлаю $x + \frac{3}{2} = z$, по составленіи квадрата нахожу $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$, и слѣд. $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; сравнивъ сію эквацію съ $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, нахожу $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, или $zz = \frac{18}{4}$ уравненіе безъ втораго члена.

Естьли будетъ дано другое уравненіе такое $x^2 - 4x = 7$; то сдѣлавъ $x - 2 = z$ составлю квадраты изъ обѣихъ частей послѣдняго и получу $x^2 - 4x + 4 = zz$, или $x^2 - 4x = zz - 4$; потомъ вставивъ въ первомъ уравненіи равныя количества за равныя, буду имѣть $zz - 4 = 7$, или $zz = 11$ уравненіе безъ втораго члена.

314. Можно также, кому угодно, приравнять неизвѣстное, усугубленное полови-

ною коеффиціента втораго члена не только просто къ другому неизвѣстному, но и умноженному или раздѣленному на произвольное количество; сіе замѣчаніе въ нѣкоторыхъ случаяхъ намъ будетъ надобно.

На примѣръ въ уравненіи $x^2 - 4x = 7$ вмѣсто $x - 2 = z$, какъ было показано выше, могу сдѣлать $x - 2 = \frac{k}{n} z$; послѣ чего поступая такимъ же образомъ, выведу $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, и слѣд. $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$, наконецъ по вставкѣ $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$, или $\frac{kk}{nn} zz = 11$.

Средства приводить всякое уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными, изображающее возможную линею, въ уравненія Коническихъ сѣченій.

315. Положимъ, что $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$ представляетъ такое уравненіе, которое заключаетъ въ себѣ уравненія всякаго рода второй степени съ двумя неопредѣленными u и t, и въ которомъ недостатка нѣтъ ни въ какомъ членѣ. Представимъ, что уравненіе сіе принадлежитъ кривой линеи MM (*фиг.* 42 и 43), коей AP и PM изображаютъ координаты. Вотъ какимъ образомъ можно увѣриться, что

эта кривая линея состоитЪ изЪ коническаго сѣченія, и вотЪ какЪ это коническое сѣченіе опредѣляется.

Должно вопервыхЪ, когда оба изЪ квадратовЪ t^2 и u^2 находятся вЪ уравненіи, уничтожить второй членЪ онаго по буквѣ t, потомЪ второй же членЪ по буквѣ u, что произведи слѣдующимЪ образомЪ.

Заключивъ вЪ скобкахЪ все, что умножаетЪ первую степень t, удали отЪ tt множителя его d, послѣ чего произойдетЪ $tt + (f + \frac{cu}{d})\, t + \frac{euu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = o$ (A). Сдѣлай (313) $t + \frac{1}{2} f + \frac{cu}{2d} = y$, составь изЪ каждой части сего уравненія квадраты, выдетЪ $tt + (f + \frac{cu}{d})\, t + \frac{1}{4} ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} = yy$, и слѣд. $tt + (f + \frac{cu}{d})\, t = yy - \frac{1}{4} ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$; сравнивЪ уравненіе сіе сЪ показаннымЪ вЪ (A), и сдѣлавЪ потомЪ такую переставку членамЪ, чтобЪ yy оставался одинЪ, получишь $yy = \frac{1}{4} ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{euu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$, или по умноженіи всего на $4dd$ и по совокупленіи членовЪ, умножаемыхЪ на подобныя степени u, будешь наконецЪ имѣть $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)\, u + (cc - 4de)\, uu$.

Поелику d, c, e, f и проч. изображаютЪ извѣстныя количества, то можно для сокращенія выкладки представить $ffdd - 4ha^3$ одною буквою r, $2cfd - 4ged$ чрезЪ q, и $cc - 4de$ чрезЪ m; послѣ чего экваці[illegible] превратится вЪ $4ddyy = r + qu + mu^2$; вЪ которой m, q, r могутЪ быть положительными или отрицательными количествами.

Уничтожь теперь второй членЪ по буквѣ u; для сего удаливЪ отЪ uu множителя его, представь уравненіе вЪ такомЪ видѣ $u^2 + \frac{q}{m} u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m} yy$ (B).

Сдѣлай $u + \frac{q}{2m}$ равнымЪ не просто уже новому неопредѣленному x по правилу (313), но $= \frac{qx}{2mn}$ (314), то есть, равнымЪ новому неопредѣленному x, умноженному на половину коеффиціента втораго члена и раздѣленному на произвольное количество n, которое на нѣкоторое время остается неизвѣстнымЪ, но послѣ опредѣляется (*).

По составленіи квадратовЪ изЪ обѣихЪ частей $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ выходитЪ $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mmnn}$, или $uu + \frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm}$. СравнивЪ уравненіе сіе сЪ означеннымЪ вЪ (B), получишь $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m} yy$ уравненіе, которое будетЪ принадлежать эллипсису или гиперболѣ, естьли никакое изЪ извѣстныхЪ количествЪ d, m, q, r и проч. не равно нулю, и естьли оно представляетЪ возможную линею.

Разсмотрим теперь, вЪ какихЪ случаяхЪ уравненіе сіе представляетЪ кривую линею, относящуюся кЪ эллипсису, вЪ ка

(*) Количество сіе n вводится для того, чтобЪ получить прямо уравненіе, принадлежащее сопряженнымЪ діаметрамЪ. Естьли же приравняешь просто кЪ x, то конечное уравненіе хотя и получитЪ видЪ эллипсическаго или гиперболическаго уравненія, однако будетЪ относиться кЪ тому случаю, о которомЪ разсуждали мы (305).

кихъ къ гиперболѣ, и въ какихъ наконецъ случаяхъ оно не представляетъ никакой кривой линеи.

Для достиженія сего, уничтожимъ коеффиціента въ yy; отъ чего произойдетъ $yy = \frac{qqxx}{16mnndd} - \frac{qq}{16mdd} + \frac{r}{4dd}$, потомъ раздѣливъ вторую часть сего уравненія на коеффиціента количества xx и представивъ умноженіе на того же коеффиціента въ показаніи, будемъ имѣть $yy = \frac{qq}{16mnndd}$ ($xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}$) такое уравненіе, въ которомъ знаки не могутъ перемѣниться, пока m и r останутся положительными; ибо количества q, n, d состоятъ изъ квадратовъ; свойство кривой линеи не перемѣнится также отъ перемѣны знака въ r, потому что r, будучи положительнымъ или отрицательнымъ, не дѣлаетъ никакой перемѣны въ знакахъ квадратовъ yy и xx. Чтожъ касается до m, естьли оно будетъ отрицательнымъ, то эквація въ такомъ случаѣ становится $yy = \frac{qq}{-16mnndd} \times (xx - nn - \frac{4mrnn}{qq})$, или по перемѣнѣ знаковъ сверху и снизу $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times (nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx)$.

Отсюда явствуетъ (306 и 307), что пока m будетъ положительнымъ количествомъ, кривая линея представляетъ гиперболу; кой же часъ сдѣлается m отрицательнымъ, то она превращается въ эллипсисъ; но поелику количество m изображено выше чрезъ $cc - 4de$, гдѣ c будучи квадратомъ, должно быть всегда положительнымъ; почему m или $cc - 4de$ не можетъ сдѣлаться отрицательнымъ, пока $4de$ будетъ меньше cc.

316. Почему *желая узнать, въ какихъ случаяхъ уравненіе второй степени съ двумя неопредѣленными* u *и* t, *такое на примѣръ, какъ* $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = o$ *принадлежитъ эллипсису или гиперболѣ*, должно *изслѣдовать, какое количество представляетъ квадратъ* cc *коеффиціентъ члена* ut, *безъ учетвереннаго произведенія* de *коеффиціентовъ членовъ* t^2 *и* u^2, *положительное или отрицательное; въ первомъ случаѣ кривая линея будетъ гиперболою, а во второмъ эллипсисомъ*. Надлежитъ только исключить отсюда тотъ случай, когда r, представляя въ эллипсисѣ отрицательное количество, будетъ больше $\frac{qq}{4m}$; ибо количество $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ превратившись въ $nn - \frac{4mrnn}{qq}$

или въ $nn\left(1-\frac{4mr}{qq}\right)$, становится отрицательнымъ, естьли $\frac{4mr}{qq}$ больше 1, или естьли, что все равно, $4mr$ больше qq, или наконецъ r больше $\frac{qq}{4m}$; въ такомъ случаѣ величина y и слѣд. кривая линея превращается въ количество умственное.

Остается еще показать, какимъ образомъ по такомъ изслѣдованіи должно чертить эллипсисъ и гиперболу; посмотримъ напередъ на эллипсисъ.

317. Изъ двухъ уравненій $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, и $u+\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, выведенныхъ нами для уничтоженія вторыхъ членовъ, послѣднее по настоящему предположенію m количествомъ отрицательнымъ, превращается въ $u-\frac{q}{2m}=\frac{-qx}{2mn}$; а какъ количество n введено произвольно, то можно принять его за положительное или отрицательное; принявъ его отрицательнымъ, получимъ $u-\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$. Теперь сдѣлаемъ конструкцію по двумъ симъ уравненіямъ, и опредѣлимъ ею положеніе сопряженныхъ діаметровъ.

Первое уравненіе, именно $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$ показываетъ, что для опредѣленія величины y должно усугубить каждое t количествомъ $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; и для того провожу чрезъ точку A, начало количествъ u и t (*фиг.* 42) линею AB $= \frac{1}{2}f$, параллельную съ линеями PM или t; чрезъ точку B провожу BKI параллельную съ AR, на которой щетъ свой имѣютъ u, и взявши произвольно BK, продолжаю параллельно съ AB линею KL такую, которая бы содержалась къ BK $= \frac{1}{2}c : d$; естьли чрезъ точки B и L проведена будетъ линея BLQ неопредѣленной величины, то линеи QM, считаемыя отъ точекъ Q, гдѣ сія линея пересѣкаетъ линеи PM, будутъ служить величинами y. Ибо QM $=$ PM $+$ PQ $=$ PM $+$ PI $+$ IQ $= t + \frac{1}{2}f +$ IQ; притомъ же въ подобныхъ треугольникахъ BKL и BIQ получаемъ BK : KL $=$ BI или AP : IQ, то есть, $d : \frac{1}{2}c = u :$ IQ $= \frac{cu}{2d}$; слѣд. QM $= t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Поелику y считаются отъ линеи LQ, то должно (305) для отнесенія эллипсической эквацiи, найденной выше, ~~къ~~ сопряженнымъ діаметрамъ, вести счетъ количествамъ x отъ линеи BLQ; точка, откуда начинается счетъ, представитъ центръ; та-

кимѣ образомѣ QLB показываетѣ направленіе одного изѣ діаметровѣ. Посмотримѣ, какѣ можно опредѣлить центрѣ.

Второе уравненіе $\frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ показываетѣ, что естьли на AP или u взята будетѣ AG $= \frac{q}{2m}$, то количество GP равное AP — AG, сдѣлается равно также $u - \frac{q}{2m}$, и слѣд. $\frac{qx}{2mn}$; почему GP $= \frac{qx}{2mn}$; но естьли чрезѣ точку G проведешь NGC параллельно сѣ линеями PM, то точка C, гдѣ она пересѣчется сѣ LQ, будетѣ началомѣ x, и слѣд. центромѣ; ибо видѣли мы, что x должны считаться на LQ; но когда GP будетѣ равна нулю, то и величина ея $\frac{qx}{2mn}$ должна также равняться нулю; слѣд. x не имѣетѣ вѣ такомѣ случаѣ никакой величины, и потому точка C должна представлять начало количествѣ x; и такѣ y представляютѣ линеи QM, а x линеи CQ. Послѣ сего не трудно опредѣлить величину n; ибо GP $= \frac{qx}{2mn}$, или (по вставкѣ за x величины CQ, а за $\frac{q}{2m}$ величины AG), GP $= \frac{AG \times CQ}{n}$; слѣд.. $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; но по причинѣ параллельныхѣ линей QP, CG и AB выходитѣ GP:

$AG = CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; слѣд. $n = BC$; то есть, чтобъ найденная выше эллипсическая эквація относилась къ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ направленіе показываютъ QB и CN, должно за величину n принять линею BC, которая опредѣлена предыдущими конструкціями.

И такъ для начерченія эллипсиса остается теперь опредѣлить величину сопряженныхъ діаметровъ, потому что уголъ BCN, которой они составляютъ, опредѣленъ уже въ предыдущихъ дѣйствіяхъ. Но это можно сдѣлать безъ всякаго затрудненія, поступая по предписанному (310), именно сравнивъ эквацію $yy = \frac{qq}{16mddnn} (nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx)$ съ экваціею $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4} aa - xx)$. Изъ сего сравненія выходитъ $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$ и $\frac{1}{4} aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; слѣд. $a = \sqrt{(4nn + \frac{16mnnr}{qq})}$, а $b = \sqrt{(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd})}$; но поелику n, m, q, r, d представляютъ извѣстныя количества, то величина сопряженныхъ діаметровъ становится теперь извѣстною. И такъ по извѣстнымъ діаметрамъ и углу ихъ BCN начерти эллипсисъ, какъ было предписано (252).

318. Замѣтимъ здѣсь, что естьли величины a и b будутъ равны, и притомъ уголъ BCN прямой, то кривая линея представляетъ кругъ. А чтобъ узнать, въ какихъ случаяхъ это можетъ быть, то 1 е. должно предположить, что въ настоящемъ эллипсическомъ уравненіи $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, то есть, $qq = 16mddnn$, откуда выходитъ $nn = \frac{qq}{16mdd}$. 2 е. Естьли уголъ BCD прямой, то должно, чтобъ $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; но $BC = n$; притомъ въ подобныхъ треугольникахъ BCD, BKL получаемъ $BK : KL = BD$ или $AG : CD$, то есть, $d : \frac{1}{2}c = \frac{q}{2m} : CD = \frac{qc}{4md}$; слѣд. $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, или $m + cc = 4dd$; но поелику количество m есть отрицательное, то выходитъ $cc - 4de = -m$, или $m = 4de - cc$; изъ сего слѣдуетъ, что $4de = 4dd$, или $d = e$.

319. И такъ *желая узнать, что представляетъ кривая линея, кругъ ли, эллипсисъ или гиперболу*, не должно смотрѣть на послѣдніе три члена fdt, geu и hd^2 эквацiи $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = o$, но на три первые; ибо естьли d, c и e таковы, что $cc - 4de$ будетъ представлять положительное количество, то кривая линея относится къ гиперболѣ; эллипсису же напротивъ принадлежитъ она тогда, когда $cc - 4de$ показываетъ отрицательное количество, выключая тотъ случай, когда $d = e$; то есть, когда оба квадраты u^2 и t^2 будутъ имѣть одинакой коеффицiентъ, тогда кривая линея

состоитъ изъ круга, естьли уголъ BCD окажется по предыдущей конструкціи прямымъ.

320. Все сказанное нами, кромѣ параграфа 318, принадлежитъ равно и для гиперболы, то есть, уравненію $yy = \frac{qq}{16mnndd}$ $(xx - nn + \frac{4mmnn}{qq})$ съ одною разностью въ знакахъ. И такъ перечитавши все изъясненное выше, и примѣнивъ оное къ *фигурѣ* 43, не нужно дѣлать другой перемѣны, кромѣ переноски AG на противную сторону AP, что означается самымъ уравненіемъ $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, которое выведено (317). Чтожъ касается до прочаго, то оно остается одинаково, и слѣд. одно только названіе *эллипсиса* перемѣняется въ *гиперболу*.

Хотя въ нѣкоторыхъ особыхъ случаяхъ количества AG, BK, AB, KL (*фиг.* 42 и 43) могутъ быть расположены совсѣмъ инымъ образомъ, нежели какъ мы ихъ здѣсь видимъ; однако перемѣны сіи можно всегда узнать по знакамъ количествъ d, c, f, m, q и проч. въ уравненіяхъ $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, и $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, которыя выходятъ по уничтоженіи вторыхъ членовъ.

321. Остается еще разсмотрѣть намъ два случая: 1^e, когда $cc - 4de = o$; 2^e, когда вмѣстѣ и $d = o$ и $e = o$.

Въ первомъ случаѣ, именно, когда $cc - 4de = o$, или когда $cc = 4de$, кривая линея состоитъ изъ параболы. Поелику количество m бываетъ тогда равно нулю, то предыдущая конструкція становится безполезною; ибо по уничтоженіи втораго члена относительно къ буквѣ t, членъ u^2 самъ уничтожается. Сей случай представляется тогда, когда по разсмотрѣніи экваціи выходитъ $cc = 4de$, то есть, когда три члена t^2, ut и u^2 составляютъ квадратъ; потому что изъ $cc = 4de$ выводится $c = 2\sqrt{de}$, а это перемѣняетъ три первые члена экваціи въ $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$ въ такое количество, которое изображаетъ квадратъ изъ $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Естьли въ такомъ предположеніи уничтожишъ, какъ показано выше, второй членъ начальнаго уравненія по буквѣ t, то оно перемѣнится въ $4ddyy = r + qu$; но чтобъ представить сіе послѣднее уравненіе въ видѣ $yy = px$, которое (301) принадлежитъ параболѣ относительно къ какому нибудь діаметру ея, коего ординаты парал-

лельны съ тангенсомъ, проведеннымъ къ верху того же поперешника, уничтожь въ yy множителя, отъ чего произойдетъ $yy = \frac{r + qu}{4dd}$; сдѣлай вторую часть сего уравненія равною новому неопредѣленному x, умноженному на количество n, которое опредѣлится такъ, какъ ниже увидимъ, то есть, сдѣлай $\frac{r + qu}{4dd} = nx$; послѣ чего $yy = nx$. Теперь стоитъ только сдѣлать конструкцію какъ для эквацiи $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, которая служила къ уничтоженію втораго члена по буквѣ t, такъ и для эквацiи $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, служащей для втораго приведенія. Поелику первая изъ нихъ сходствуетъ въ точности съ тою, для которой сдѣлана конструкція (317), то можно ее сочинить по *фигурѣ* 44, сдѣлавъ всему тому приноровку, что сказано было (317) для *фигуры* 42; что касается до конструкціи $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, то линеи QM (*фиг.* 44) будутъ представлять y, а BLQ будетъ служить направленіемъ діаметра, на которомъ x получаютъ свой счетъ.

Для опредѣленія начала абсциссъ x, и слѣд. верха самаго діаметра, надлежитъ

употребить эквацію $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, изъ которой выводя $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$ заключаемъ, что естьли взято будетъ съ противной стороны AP количество AG $= \frac{r}{q}$, то произойдетъ GP $= \frac{4ddnx}{q}$, потому что GP = AP + AG = $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; и такъ естьли чрезъ точку G проведешь GCD параллельную къ линеямъ PM, и пересѣкающую QLB въ C, то точка C будетъ началомъ x, потому что изъ уравненія GP $= \frac{4ddnx}{q}$ явствуетъ, что какъ скоро GP будетъ равно нулю, то и x должно также равняться нулю; притомъ количества x долженствуя имѣть счетъ свой на линеѣ, отъ которой простираются y, будутъ непремѣнно вести оной на BQ.

Теперь стоитъ только опредѣлить параметръ n. А какъ нашли мы, что GP $= \frac{4ddnx}{q}$, и притомъ по причинѣ параллельныхъ линей CD и QI можно послать BC : BD или AG = CQ : DI или GP; то есть, BC : $\frac{r}{q}$ $= x : \frac{4ddnx}{q}$; то должно заключить, что BC $= \frac{r}{4ddn}$, и слѣд. $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; но r и d даны, а BC опредѣлена по конструкціи;

слѣд. n или параметрЪ становится теперь извѣстнымЪ. Но какЪ по той же конструкціи опредѣляю вмѣстѣ и уголЪ координатЪ CQ и QM или x и y, то не трудно послѣ сего начертить параболу по изъясненному правилу (302).

322. Поелику общее уравненіе, вЪ которомЪ $cc = 4de$, принадлежитЪ параболѣ и не содержитЪ вЪ себѣ произведенія ut двухЪ неопредѣленныхЪ; изЪ сего слѣдуетЪ заключить, что оно не должно имѣть также и одного изЪ квадратовЪ t^2 или u^2; ибо по допущеніи c равнымЪ нулю, уравненіе $cc = 4de$ или $o = 4de$, показываетЪ, что d или $e = o$.

323. Естьли оба квадрата неопредѣленныхЪ заключаются вЪ уравненіи, но произведенія ихЪ ut не находится: то сдѣланная конструкція (317) и относящаяся кЪ фигурамЪ 42 и 43, становится легче и проще, потому что по допущеніи c равнымЪ нулю, линея KL уничтожается и BL упадаетЪ на BK; она становится тогда діаметромЪ, а линеи x и y параллельными сЪ линеями u и t. Уничтоженіе втораго члена по буквѣ u должно сдѣлать вЪ такомЪ случаѣ безЪ неизвѣстнаго n; ибо BC, представляя n (317), становится равно

BD или AG, и слѣд. $n = \frac{q}{2m}$; а это превратитъ уравненіе $u + \frac{q}{2m} = \frac{px}{2mn}$, выведенное нами выше по уничтоженіи втораго члена по буквѣ u, въ другое такое $u + \frac{q}{2m} = x$.

Отсюда явствуетъ, что кривая линея тогда только можетъ представлять кругъ, когда сверхъ упомянутыхъ (318) условій уголъ коордонатъ u и t будетъ прямой.

324. Естьли по уничтоженіи въ уравненіи, заключающемъ произведеніе ut, втораго члена относительно къ какому нибудь изъ двухъ неопредѣленныхъ, на примѣръ относительно къ t, не останется другой степени неопредѣленнаго u, кромѣ квадрата его; то хотя не нужно болѣе уничтожать второй членъ по буквѣ u, однако должно сдѣлать ему такое превращеніе, именно положить $u = \frac{lx}{n}$; $\frac{l}{n}$ будетъ представлять неизвѣстную дробь, которую опредѣли по конструкціи показанной (321). Мы дадимъ на это примѣръ ниже.

325. Естьли между тремя членами t^2, ut и u^2 не будетъ доставать какого нибудь изъ квадратовъ, то уравненіе относится къ

гиперболѣ, или не изображаетъ никакой кривой линеи; потому что когда d или e равняется нулю, тогда количество $cc - 4de$ превращаясь въ cc, становится положительнымъ.

326. Наконецъ естьли въ уравненіи не будетъ находиться обоихъ квадратовъ t^2 и u^2, и оно приметъ такой видъ $gut + ht - ku - l = o$, (между количествами g, h, k, l могутъ быть иныя положительными, а иныя отрицательными); то не можно болѣе употребить для него сдѣланной (317) конструкціи. Уравненіе такое принадлежитъ гиперболѣ, относящейся къ асимптотамъ своимъ; но какъ абсциссы и ордонаты не имѣютъ здѣсь счету отъ центра, то вотъ какимъ образомъ сдѣлай ихъ такими.

Уничтожъ въ произведеніи ut коеффиціентъ g, отъ чего произойдетъ $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = o$. Сдѣлай сумму количествъ, умножающихъ u, равною неопредѣленному y, то есть, $t - \frac{k}{g} = y$; откуда выходитъ $t = y + \frac{k}{g}$; вставивъ величину сію въ уравненіи $ut + \frac{ht}{g}$ и проч. $= o$, получишь $uy +$

$\frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = o$; послѣ сей перемѣны сдѣлай сумму всѣхъ количествъ, умножающихъ y, равною новому неопредѣленному x, то есть, сдѣлай $u + \frac{h}{g} = x$, отъ чего уравненіе превратится въ $xy + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = o$, или въ $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ между ея асимптотами; абсциссы x получаютъ здѣсь счетъ свой отъ центра какой нибудь асимптоты, а ордонаты y отъ той же асимптоты параллельно къ другой; наконецъ степень сей гиперболы представляетъ $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (282).

Для начерченія сей гиперболы, сдѣлай конструкцію двумъ уравненіямъ $t - \frac{k}{g} = y$, и $u + \frac{h}{g} = x$ слѣдующимъ образомъ. Изъ перваго явствуетъ, что для опредѣленія y должно уменьшить каждое t количествомъ $\frac{k}{g}$. И такъ проведи изъ точки А (*фиг.* 45) начала величинъ u и t линею АВ параллельную съ линеями РМ или t и равную $\frac{k}{g}$; потомъ продолживъ изъ точки В линею CBQ параллельную съ АР, получишь въ линеяхъ

QM величины y, потому что $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Для полученія величинѣ x, уравненіе $u + \frac{h}{g} = x$ показываетѣ, что должно увеличить u, то есть, линеи AP количествомѣ $\frac{h}{g}$; и для того положивѣ сѣ противной стороны AP линею $AG = \frac{h}{g}$, проведи GS параллельную сѣ линеями PM, и пересѣкающую BQ вѣ C; CQ будетѣ представлять x, а C центрѣ гиперболы, которой асимптотами служатѣ CQ и CS. Нашедши асимптоты и имѣя предѣ глазами уравненіе $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, начерти гиперболу показаннымѣ (289) образомѣ.

Естьли три первые члена t^2, ut, u^2 не будутѣ находиться вѣ уравненіи, то оно не изобразитѣ больше кривой линеи, а представитѣ прямую, для которой сдѣлай конструкцію по правиламѣ, какія предписаны были для сочиненія прямыхѣ линей.

327. И такѣ заключимѣ, что 1^e. всякое уравненіе второй степени сѣ двумя неопредѣленными изображаетѣ всегда коничe-

ское сѣченіе, или не изображаетъ никакой возможной кривой линеи. 2^e. Сія кривая линея бываетъ или эллипсисъ, или гипербола, или парабола, глядя по тому, какое представляетъ количество квадратъ коеффиціента въ произведеніи ut двухъ неопредѣленныхъ безъ учетвереннаго произведенія коеффиціентовъ двухъ квадратовъ t^2 и u^2, отрицательное или положительное или равное нулю; и въ особенности она можетъ быть кругомъ тогда, когда въ означенномъ отрицательномъ результатъ коеффиціенты квадратовъ u^2 и t^2 равны между собою. 3^e. Наконецъ, чтобъ превратить всякое уравненіе, принадлежащее коническому сѣченію, въ такія, какія выведены были изъ разсужденій нашихъ о сихъ кривыхъ линеяхъ, должно поступать въ сходственность преподанныхъ правилъ (315, 317, 320, 321 и 326).

Примѣненіе предыдущихъ правилъ для рѣшенія нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ вопросовъ.

328. Для показанія изъясненныхъ превращеній на самой практикѣ, предложимъ первымъ вопросомъ: *найти такую кривую линею (фиг. 46), въ которой бы разстоянія отъ каждой точки M къ двумъ постояннымъ A и B находились всегда въ одинакомъ содержаніи, именно какъ g : h?*

Вообразивъ изъ каждой точки M перпендикуляры MP, опущенные на линею AB, станемъ искать

отношеніе сихъ перпендикуляровъ къ разстояніямъ ихъ AP отъ точки A, и для того назовемъ AP, u; PM, t; а извѣстную линею AB, c.

По предположеніи сего, въ прямоугольномъ треугольникѣ APM получимъ $AM = \sqrt{[(AP)^2 + (PM)^2]} = \sqrt{(uu + tt)}$, а въ прямоугольномъ треугольникѣ BPM, $BM = \sqrt{[(BP)^2 + (PM)^2]}$; но $BP = AP - AB = u - c$, слѣд. $BM = \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$; а какъ притомъ по требованію $AM : BM = g : h$, то получимъ $\sqrt{(uu + tt)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)} = g : h$; слѣд. $h\sqrt{(uu + tt)} = g\sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$, или по составленіи квадратовъ, $hhuu + hhtt = gguu - 2ggcu + ggcc + ggtt$, или $(gg - hh)\,uu + (gg - hh)\,tt - 2ggcu + ggcc = 0$ такое уравненіе, которое (318) относится къ кругу, потому что оба квадрата uu и tt стоятъ въ одной и той же части уравненія съ одинакимъ знакомъ и съ одинакимъ коеффиціентомъ.

Поелику не находится въ семъ уравненіи втораго члена по буквѣ t, то для представленія его въ видѣ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (317), положи неопредѣленно $t = y$; послѣ чего оно превратится въ $(gg - hh)\,uu + (gg - hh)\,yy - 2ggcu + ggcc = 0$; уничтожь второй членъ по буквѣ u; и какъ произведеніе ut не заключается въ уравненіи, то стоитъ только (323) для сего дѣйствія употребить предписанное (313) правило. И для того уничтоживъ коеффиціентъ въ uu, получишь $uu - \frac{2ggcu}{gg - hh} = -\frac{ggcc}{gg - hh} - yy$; сдѣлай $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$, и по составленіи квадратовъ, поставь въ первой части на мѣсто $uu +$ и проч. величину его $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2}$, отъ чего произойдетъ $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} = -\frac{ggcc}{gg - hh} - yy$, или $yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx$ такое уравненіе, которое сравнивъ съ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, получишь $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}$, и слѣд. радіусъ $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}$. Теперь все дѣло состоитъ въ томъ,

чтобъ опредѣлить центръ, долженствующій находиться на ABP, потому что $t = y$. Но для опредѣленія x, должно по уравненію $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$ уменьшить u количествомъ $\frac{ggc}{gg - hh}$; и потому сдѣлай AC $= \frac{ggc}{gg - hh}$; въ такомъ случаѣ CP будетъ представлять x, потому что она равна AP — AC, то есть, равна $u - \frac{ggc}{gg - hh}$; напослѣдокъ изъ точки C какъ изъ центра и радїусомъ равнымъ $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$ опиши кругъ; каждая точка M сего круга будетъ имѣть требуемое свойство.

Впрочемъ можно сыскать центръ и полупоперешникъ по уравненію $uu - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; поелику центръ долженъ находиться на AP, такъ какъ мы уже замѣтили, то сдѣлавъ $y = o$, получимъ по разрѣшеніи сего уравненія двѣ величины u, кои изобразятъ разстоянія AD, AE, гдѣ окружность пересѣчетъ прямую линею AB; и такъ раздѣливъ пополамъ DE, получишь центръ и радїусъ CE. По разрѣшеніи уравненія $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh}$, выходитъ $u = \frac{g^2c}{gg - hh} \pm \sqrt{\left(\frac{gghhcc}{(gg - hh)^2}\right)} = \ldots$ $\frac{g^2c \pm ghc}{gg - hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g - h)(g + h)}$; послѣднее уравненіе представляетъ двѣ такія величины, $u = \frac{gc}{g + h} =$ AD, и $u = \frac{gc}{g - h} =$ AE.

329. Предложимъ вторымъ вопросомъ слѣдующій: *сыскать внѣ данной линеи AR (фиг. 47) множество разныхъ точекъ M такого свойства, чтобъ, по проведеніи изъ нихъ къ постояннымъ точкамъ A*

и R *прямыхъ линей* MA *и* MR, *сіи прямыя линеи заключали всегда уголъ* AMR *равный данному?*

Представимъ чрезъ r синусъ цѣлой или радіусъ таблицъ, а чрезъ m тангенсъ даннаго угла, которому AMR долженъ быть равенъ; опустимъ перпендикуляръ MP, и назвавъ AP, u; PM, t; AR, b; получимъ $PR = b - u$.

Припомнимъ теперь три доказанныя предложенія (*Геом.* 282, 286 и 287), именно, что по допущеніи A и B углами, выходитъ . . . .

$$1е\ син.\ (A + B) = \frac{син.\ A\ кос.\ B + син.\ B\ кос.\ A}{r};$$

$$2е\ кос.\ (A + B) = \frac{кос.\ A\ кос.\ B - син.\ A\ син.\ B}{r};$$

$$3е\ танг.\ (A + B) = \frac{r\ син.\ (A + B)}{кос.\ (A + B)}.$$

По предположеніи сего, въ прямоугольныхъ треугольникахъ APM, RPM получимъ (*Геом* 299) AM : AP = r : *син.* AMP; AM : PM = r : *син.* MAP или *кос.* AMP; RM : RP = r : *син.* RMP; RM : PM = r : *син.* MRP или *кос.* RMP, отсюда выходитъ *син.* $AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; *кос.* $AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; *син.* $RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; *кос.* $RMP = \frac{r \times PM}{RM}$; а какъ AMR = AMP + RMP, то получимъ въ сходственность припомянутыхъ формулъ, *син.* $AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$, и *кос.* $AMR = \frac{r \times (PM)^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$; слѣ. $\frac{r\ син.\ AMR}{кос.\ AMR}$, или *танг.* $AMR = \frac{r \times AR \times PM}{(PM)^2 - AP \times RP}$; или по вставкѣ Алгебраическихъ величинъ и по приведеніи $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$, откуда выходитъ $mtt + muu - mbu - rbt = o$, уравненіе относящееся къ кругу, какъ того и ожидать надлежало.

Для опредѣленія центра и радіуса, должно представить сіе уравненіе въ видѣ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Почему уничтожаю въ tt коеффиціентъ его, отъ чего происходитъ $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = o$; дѣлаю (313) $t = \frac{rb}{2m} + y$, и поступая по предписанному тамъ правилу, превращаю уравненіе въ $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = o$. Теперь остается уничтожить второй членъ по буквѣ u; но какъ произведенія ut не находится въ эквацїи, то дѣлаю просто (323) $u - \frac{b}{2} = x$, и вывожу уравненіе $yy - \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = o$, или $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, которое сравнивъ съ $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, нахожу, что $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, и слѣд. радіусъ $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$.

Для опредѣленія центра и радіуса должно по уравненію $t - \frac{rb}{2m} = y$ провести AB параллельно съ PM, то есть, поставивъ изъ точки A перпендикуляръ $AB = \frac{rb}{2m}$, продолжить BCQ параллельно съ AR; линеи QM представятъ y, потому что $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$.

Естьли по уравненію $u - \frac{b}{2} = x$, положу на AR часть $AG = \frac{b}{2}$, то GP изобразитъ x, потому что $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$. И такъ продолживъ изъ точки G линею GC параллельно съ PM, по-

лучу C за центрЪ. По проведенiи AC, буду имѣть, по причинѣ прямаго угла G, $AC = \sqrt{[(AG)^2 + (GC)^2]} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$; слѣд. AC представитЪ радiусЪ.

И такЪ вЪ производствѣ конструкцiи поступай слѣдующимЪ образомЪ: поставь изЪ середины AR перпендикулярЪ $GC = \frac{rb}{2m}$, и опиши изЪ точки C, какЪ изЪ центра, и радiусомЪ CA кругЪ; всякой уголЪ MAR, имѣющiй верхЪ свой при окружности и проходящiй боками своими чрезЪ точки A и R будетЪ равенЪ данному углу. Для сочиненiя же количества $\frac{rb}{2m}$ должно провести прямую AO такую, которая бы сдѣлала сЪ AB уголЪ BAO, равный данному; она прорѣжетЪ GC вЪ искомой точкѣ C; ибо вЪ прямоугольномЪ треугольникѣ ABC можно послать r : *танг.* BAC = AB : BC или AG, то есть, $r : m = AB : \frac{1}{2}b$; слѣд. AB или $GC = \frac{rb}{2m}$.

Отсюда заключимЪ наконецЪ, что для совершенiя той же конструкцiи, должно провести изЪ точки A линею AO такую, которая бы сЪ AR сдѣлала уголЪ RAO, равный дополненiю даннаго угла кЪ 90°; сiя линея прорѣзавЪ вЪ C перпендикулярЪ GC, поставленный изЪ середины AR, представитЪ вЪ C центрЪ, а вЪ CA радiусЪ круга.

330. По предыдущему разсужденiю не трудно рѣшить и слѣдующiй вопросЪ: *Знавши положенiе трехЪ точекЪ* R, A, R′ (фиг 48) *и углы, подЪ коими видны изЪ нѣкоторой точки* M *линеи* RA, AR′, *сыскать эту точку* M?

ИзЪ середины G и G′ двухЪ линей RA и AR′ поставь перпендикуляры GC и G′C′; чрезЪ точку A продолжи линеи AC и AC′, изЪ которыхЪ бы каждая сЪ AR и AR′ сдѣлала углы RAC, R′AC′ равныя дополненiю угловЪ MA, R′MA, подЪ коими видны извѣстныя линеи.

Изъ точекъ C и C′, какъ изъ центровъ и радїусами CA, C′A опиши два круга, коихъ окружности пересѣкутся въ A и M; точка M будетъ искомая. Въ справедливости сего можно увѣриться рѣшенїемъ предыдущаго вопроса.

Задача сїя можетъ служить къ означенїю на картѣ положенїя такой точки, изъ которой наблюдены или вымѣрены были три извѣстные предмета.

Естьли вымѣренные углы RMA, R′MA будутъ равны угламъ RR′A и R′RA, то задача въ такомъ случаѣ становится неопредѣленною; ибо оба круга сольются вмѣстѣ, и слѣд. каждая точка окружности ихъ выполнитъ требованїе вопроса.

331. Предложимъ третьимъ вопросомъ найти такую кривую линею или такїя кривыя линеи, которыя бы имѣли слѣдующее свойство: AZ, AT, (*фиг.* 49) *суть двѣ линеи, составляющїя между собою какой нибудь извѣстной величины уголъ, требуется опредѣлить такїя кривыя линеи, въ которыхъ бы разстоянїе отъ каждой точки* M *къ постоянной точкѣ* F, *взятой на* AZ, *находилось всегда въ одинакомъ содержанїи съ разстоянїемъ* MT *отъ той же точки* M *къ прямой* AT; *разстоянїе* MT *предполагается параллельнымъ съ* AZ?

Вообразимъ изъ какой нибудь точки M сей кривой линеи прямую MP параллельную съ AT и перпендикуляръ MS къ AZ; уголъ MPS будетъ извѣстенъ, и слѣд. *синусъ* и *косинусъ* его также; представимъ *синусъ* чрезъ p, *косинусъ* чрезъ q, и радїусъ таблицъ чрезъ r (*). Назовемъ AP, u; PM, t; напослѣдокъ извѣстная линея AF пусть будетъ $= c$.

(*) Здѣсь предполагается, что количества p, q, r даны по таблицамъ; впрочемъ можно ихъ опредѣлить также самою простою конструкцїею, именно сдѣлавъ прямоугольной треугольникъ такой, котораго бы одинъ изъ острыхъ угловъ былъ равенъ данному MPS, а гипотенуза произвольной величины. Принявъ сїю гипотенузу за r, получишь въ двухъ прочихъ бокахъ величины p и q.

По предположенiи сего въ прямоугольномъ треугольникѣ MSP получимъ (*Геом.* 299) r : *син.* MPS $=$ MP : MS, и r : *син.* PMS или *кос.* MPS $=$ PM : PS; то есть, $r : p = t : \text{MS} = \frac{pt}{r}$, и $r : q = t : \text{PS} = \frac{qt}{r}$. Слѣд. $\text{FS} = \text{PS} - \text{PF} = \text{PS} - \text{AP} + \text{AF} = \frac{qt}{r} - u + c$; а какъ въ прямоугольномъ треугольникѣ MSF, $\text{MF} = \sqrt{[(\text{MS})^2 + (\text{FS})^2]}$; то получимъ $\text{MF} = \sqrt{\left(\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$, или по причинѣ, что $p^2 + q^2 = r^2$ (*Геом.* 283) будемъ имѣть $\text{MF} = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$; напослѣдокъ, поелику MF должна находиться къ MT или AP въ данномъ содержанiи, то, представивъ содержанiе сiе чрезъ $g : h$, получимъ $\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)} : u = g : h$; и слѣд. $gu = h\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$, или по составленiи квадрата и по перестановкѣ членовъ, $h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$ такое уравненiе, которое представляя (315 и слѣд.) коническiя сѣченiя, будетъ (316) относиться къ эллипсису, естьли въ немъ квадратъ изъ $-\frac{2qh^2}{r}$ безъ учетвереннаго h^2 и умноженнаго на $h^2 - g^2$ изобразитъ отрицательное количество, то есть, когда $\frac{4q^2h^4 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$ будетъ отрицательное; или когда (по причинѣ что $r^2 - q^2 = p^2$) наконецъ . . . $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ изобразитъ отрицательное количество. Напротивъ того оно будетъ принадлежать гиперболѣ, когда $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ изобразитъ положи-

тельное. Оно будетъ параболическое, когда .... $\frac{4r^2b^2g^2 - 4p^2b^4}{r^2}$ равно нулю, тоесть, когда $4r^2b^2g^2 = 4p^2b^4$ или $rg = pb$. Наконецъ кривая линея будетъ состоять изъ круга, когда $h^2 = b^2 - g^2$; но это тогда только быть можетъ, когда g будетъ равно нулю, или когда b будетъ безконечнымъ количествомъ; потому что въ такомъ предположенiи g^2 въ разсужденiи b^2 почитается за ничто.

Для сочиненiя кривой линеи въ каждомъ изъ означенныхъ случаевъ должно поступать по предписаннымъ правиламъ (317 и слѣд.); но какъ мы тамъ сдѣлали уже чертежъ для эллипсиса, то постараемся теперь приноровить выведенное уравненiе къ гиперболѣ, то есть, постараемся представить сiе уравненiе въ видѣ $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Почему освободивъ въ найденномъ уравненiи t^2 отъ коеффицiента, получаю $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$. Для уничтоженiя втораго члена по буквѣ t, дѣлаю $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, и вывожу по составленiи квадрата и по переставкѣ членовъ $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, и слѣд. по вставкѣ послѣдней величины, получаю наконецъ $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Теперь слѣдуетъ уничтожить второй членъ по буквѣ u; но примѣтимъ, что члены .... $-\frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{b^2}\right)u^2$ или $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{b^2}$ или $\frac{r^2u^2 - q^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{b^2}$ превращаются въ $\frac{p^2u^2}{r^2}$..

$-\frac{g^2u^2}{b^2}$, а два члена $\frac{2cq^2u}{r^2}-2cu$ или $\frac{2cq^2u-2cr^2u}{r^2}$ въ $-\frac{2cp^2u}{r^2}$; равномѣрно два члена $-\frac{c^2q^2}{r^2}+c^2$ превращаются въ $\frac{c^2p^2}{r^2}$, потому что $r^2-q^2=p^2$. Уравненїе перемѣняется послѣ сего въ $y^2+\frac{c^2p^2}{r^2}-\frac{2cp^2u}{r^2}+\frac{p^2u^2}{r^2}-\frac{g^2u^2}{b^2}=o$, или по уничтоженїи знаменателей (сдѣлавъ притомъ для легости выкладки $p^2b^2-r^2g^2=r^2kk$) вывожу $r^2b^2y^2+c^2b^2p^2-2cb^2p^2u.+r^2k^2u^2=o$.

Уничтожаю коеффицїентъ въ u^2, и получаю $u^2-\frac{2cb^2p^2}{r^2k^2}u+\frac{b^2}{k^2}y^2+\frac{c^2b^2p^2}{r^2k^2}=o$; дѣлаю $u-\frac{cb^2p^2}{r^2k^2}=\frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$ вводя неизвѣстное n, потому что въ начальномъ уравненїи произведенїя ut не находилось (315). Тогда поступая по изъясненнымъ выше правиламъ и сдѣлавъ надлежащую членамъ вставку, вывожу $\frac{c^2b^4p^4x^2}{r^4k^4n^2}-\frac{c^2b^4p^4}{r^4k^4}+\frac{b^2}{k^2}y^2+\frac{c^2b^2p^2}{r^2k^2}=o$, или уничтоживъ общаго фактора $\frac{b^2}{k^2}$ и поставивъ y^2 особо въ части уравненїя, получаю $y^2=-\frac{c^2b^2p^4x^2}{r^4k^2n^2}-\frac{c^2p^2}{r^2}+\frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2}$, или представивъ умноженїе на x^2 въ показанїи $y^2=-\frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2+\frac{r^2n^2k^2}{p^2b^2}-nn\right)$. Поелику дѣло идетъ о гиперболѣ, то замѣтимъ, что количество r^2k^2, представляя тоже самое, что $p^2b^2-r^2g^2$, есть отрицательное; ибо по сдѣланному выше заключенїю $\frac{4r^2b^2g^2-4p^2b^4}{r^2}$ или $\frac{4b^2}{r^2}(r^2g^2-p^2b^2)$ должно изображать положительное количество, когда кривая линея

относится къ гиперболѣ. Слѣд. должно сдѣлать k^2 отрицательнымъ и вставить въ уравненіи величину его, гдѣ нужда того потребуетъ, $r^2g^2 - p^2b^2$ вмѣсто $p^2b^2 - r^2g^2$; и такъ уравненіе превращается въ $y^2 = \frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2u^2}\left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2b^2} - nn\right)$. Сравнивъ его съ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}aa)$, получимъ для опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2b^2p^4}{r^4k^2n^2}$ и $\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2b^2} + nn$, откуда весьма легко вывести можно величины a и b, то есть, величины сопряженныхъ діаметровъ, которые, какъ мы увидимъ ниже, будутъ служить осями гиперболѣ.

Опредѣлимъ направленіе сопряженныхъ діаметровъ. Въ сходственность сказаннаго (317) сочиняю два уравненія $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, и $u - \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$; а какъ замѣтили мы, что k^2 должно быть отрицательнымъ для гиперболы, то надлежитъ перемѣнить послѣднее въ $u + \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$; мы не перемѣняемъ знака въ членѣ, заключающемъ въ себѣ x, хотя k^2 въ ономъ также находится, для того, что n можно принимать произвольно положительнымъ и отрицательнымъ. И такъ должно, продолжая поступать по предписанію того же параграфа, провести изъ точки A параллельно съ PM линею AB $= \frac{cq}{r}$, и продолживъ чрезъ точку B линею BI параллельно съ AZ, взять произвольной величины BK и провести KL параллельную съ PM и такую, чтобъ BK : KL $=$ $r : q$; послѣ чего проведу чрезъ точки B и L линею LBQ, пересѣкающую PM въ Q, и получу въ линеяхъ QM величины y. Ибо QM $=$ PM — PQ $=$ PM — QI $+$ PI $= t$ — QI $+ \frac{cq}{r}$; притомъ же въ подобныхъ треугольникахъ BKL и BQI можно послать BK : KL

$= BI$ или $AP : QI$, то есть, $r : q = u : QI = \frac{qu}{r}$;

слѣд. $QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Можно короче сдѣлать эту конструкцїю, поставивши изъ точки F перпендикуляръ FB къ AT; ибо уголъ FAB будетъ равенъ углу APM, и слѣд. въ прямоугольномъ треугольникѣ ABF произойдетъ такая пропорцїя $r : q = c : AB = \frac{qc}{r}$; а какъ QM параллельна съ AB, то y должны быть перпендикулярны къ BQ, и слѣд. BQ показываетъ направленїе одной изъ осей, изъ которыхъ другая должна быть параллельна съ QM.

Теперь остается опредѣлить центръ. Второе уравненїе $u + \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$ показываетъ, что должно взять съ противной стороны u количество . . . $AG = \frac{cb^2p^2}{r^2k^2}$, и провести GC параллельно съ PM или перпендикулярно къ BQ; сїя линея GC представитъ точку C за начало x, и слѣд. за центръ гиперболы. Въ самомъ дѣлѣ количества x должно считать на CQ, потому что y ведутъ свой счетъ отъ той же линеи; притомъ же уравненїе $u + \frac{cb^2p^2}{r^2k^2} = \frac{cb^2p^2x}{r^2k^2n}$, или $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, или $GP = \frac{AG \times x}{n}$ изображаетъ, что линеи x получаютъ начало свое въ тоже самое время, какъ и линеи GP; слѣд. линеи x должны выходить изъ точки C, и состоять изъ CQ; слѣд. точка C представляетъ центръ.

При сочиненїи эллипсиса должно поступать такимъ же образомъ.

Что касается до параболы, то въ ней, какъ мы упомянули уже выше, gr должно быть равно ph; слѣд. уравненїе, выведенное въ y и u безъ втораго члена по

буквѣ t, превратится, когда поставишь въ немъ за $r^2 - q^2$ величину P^2, а за g^2 въ количествѣ k^2 величину $\frac{ph}{r}$, взятую изъ $rg = ph$, превратится, говорю, въ $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} = o$, или въ $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$. И такъ чтобъ представить это уравненіе въ видѣ параболическаго, должно сдѣлать въ сходственность (321) $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$; послѣ чего произойдетъ $yy = nx$. Сочинивъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, уравненіе $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, сдѣлай потомъ конструкцію для уравненія $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$ по предписанному (321) правилу; именно освободивъ u отъ коеффиціента и выведши $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2vx}{2cp^2}$, возьми на AP (фиг. 50) часть $AG = \frac{1}{2}c$ и проведи GC параллельно съ PM, точка C будетъ началомъ количествъ x, представляющихъ линеи CQ; такимъ образомъ CQ покажетъ направленіе діаметра; верхъ сего діаметра будетъ находиться въ C, а параметръ его будетъ n, которой опредѣлится слѣдующимъ образомъ: поелику $AG = \frac{1}{2}c$, то $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2} = \frac{r^2n}{2cp^2} \times CQ$; слѣд. $n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; притомъ же по причинѣ параллельныхъ линей FQ, CG, AB выходитъ $CQ : GP = CF : GF = BF : AF$, то есть, $CQ : GP = BF : c$; слѣд. $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; вставивъ величину сію за GP въ величинѣ n, получишь $n = \frac{2c^2p^2}{r^2 \times BF}$ извѣстное количество, потому что c, p, r даны, а BF найдена по конструкціи. Можно величину сію представить въ простѣйшемъ видѣ иначе такимъ образомъ: замѣтивъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ ABF, $r : p = AF :$

BF $=$ c : BF, получишь $BF = \frac{cp}{r}$, и слѣд. $n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF$.

Примѣненіе тѣхъ же правилъ къ нѣкоторымъ неопредѣленнымъ вопросамъ.

332. По разрѣшеніи втораго неопредѣленнаго вопроса, предложеннаго (329), вывели мы послѣ (330) рѣшеніе для другаго опредѣленнаго. Мы подразумѣвали скрытно въ семъ послѣднемъ два неопредѣленные вопроса одинакаго свойства съ первымъ. Пересѣченіе двухъ кривыхъ линей или двухъ круговъ, посредствомъ которыхъ выполнили требованія обоихъ частныхъ вопросовъ, послужило рѣшеніемъ опредѣленному. Естьли конечное или заключительное уравненіе, изображающее условія какого нибудь вопроса, превосходитъ вторую степень, то должно при рѣшеніи его поступать подобнымъ образомъ. Иногда вмѣсто одного должно употреблять два неизвѣстныхъ, и стараться выводить по условіямъ вопроса два уравненія, изъ которыхъ каждое, будучи сочинено порознь, представитъ кривую линею въ силу требованія; естьли задача возможная, то обѣ кривыя линеи пересѣкутся въ одной, или во многихъ точкахъ, глядя по тому, изъ сколькихъ она рѣшеній состоять можетъ, или сколько она можетъ заключать случаевъ, зависящихъ отъ однихъ и тѣхъ же данныхъ количествъ и одинакихъ разсужденій. Сіи пересѣченія выводятъ разныя рѣшенія для задачи.

И такъ до тѣхъ поръ, пока два уравненія съ двумя неопредѣленными не будутъ превосходить второй степени, рѣшеніе ихъ будетъ состоять не болѣе, какъ изъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій. Но естьли напротивъ того въ этихъ же случаяхъ будетъ употреблено одно неизвѣстное, или естьли посредствомъ двухъ найденныхъ уравненій исключится одно изъ неизвѣстныхъ, то уравненіе взойдетъ до третьей степени и до четвертой. Естьли одно изъ уравненій или оба вмѣстѣ превосходятъ вторую сте-

пень, то рѣшенїе въ такомъ случаѣ зависитъ отъ пересѣченїя такихъ кривыхъ линей, кои выше коническихъ сѣченїй.

Посудимъ о нѣкоторыхъ вопросахъ, для которыхъ выходятъ уравненїя не выше четвертой степени.

333. Предложимъ вопервыхъ: *найти двѣ среднїя пропорцїональныя линеи между данными двумя a и b?*

Назвавъ двѣ среднїя пропорцїональныя линеи t и u, вывожу прогрессїю $\div a : t : u : b$, изъ которой получаю двѣ слѣдующїя пропорцїи $a : t = t : u$, и $t : u = u : b$, и слѣд. оба сїи уравненїя $au = t^2$ и $bt = u^2$ будутъ относиться прямо къ параболѣ. Почему естьли проведены будутъ двѣ неопредѣленной величины линеи AZ, AX, (*фиг.* 51), составляющїя между собою всякой уголъ (для легкости можно предположить его прямымъ), и когда на одной изъ нихъ AZ, какъ на дїаметрѣ u, изъ точки A, какъ изъ верху сего дїаметра, начертится (302) парабола, которой параметръ дїаметра AZ будетъ равенъ a, а уголъ координатъ XAZ, то такая парабола разрѣшитъ уравненїе $au = t$; линеи AP будутъ представлять въ ней u, а линеи PM, t. Равномѣрно естьли на AX, какъ на дїаметрѣ и изъ точки A, какъ изъ верху, начертится парабола, коей параметръ дїаметра AX будетъ состоять изъ b, а уголъ координатъ изъ XAZ, то вторая сїя парабола будетъ принадлежать уравненїю $bt = u^2$; линеи AP′ изобразятъ t, а линеи P′M′ u. Но дабы вопросъ былъ рѣшенъ совершенно, то должно, чтобъ оба уравненїя $au = t^2$ и $bt = u^2$ имѣли силу вдругъ, то есть, чтобъ величины u и t были какъ въ томъ, такъ и другомъ одинаковы; но это не въ иномъ мѣстѣ случиться можетъ, какъ въ точкѣ M, гдѣ пересѣкаются обѣ параболы; ибо естьли, считая величины u на AZ, а t на AX, или параллельно съ AX, проведемъ MP и MP параллельно съ AX и AZ, то величина MP количества u въ параболѣ AMM′ будетъ одинакова съ величиною AP тогожъ количества u въ параболѣ AMM. Равнымъ образомъ величина AP количества t въ параболѣ AMM′ будетъ одинакова съ величиною PM или t въ параболѣ

AMM. И такъ линеи AP и PM будутъ представлять величины u и t.

334. Хотя сочиняя порознь сыскиваемыя уравненія, доходимъ всегда до общаго рѣшенія: однако не рѣдко случается, что сдѣлавъ уравненіямъ нѣкоторое приготовленіе, можно производить конструкцію гораздо легче. На примѣръ естьли сложишь два уравненія $au = t^2$ и $bt = u^2$, то въ суммѣ ихъ $au + bt = u^2 + t^2$ получишь такое, которое будетъ принадлежать кругу, естьли предположишь, что линеи u и t перпендикулярны между собою. Хотя чертежъ параболы не труденъ, но круга еще легче; слѣд. въ настоящемъ случаѣ легче сдѣлать конструкцію для послѣдняго уравненія, а именно: сочинивъ одно $au = t^2$, какъ показано было выше, сочини потомъ круговое уравненіе $au + bt = u^2 + t^2$, перемѣнивъ его въ слѣдующее другое $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$ чрезъ уничтоженіе вторыхъ членовъ по буквѣ t и по буквѣ u, то есть, сдѣлавъ $t - \frac{1}{2}b = y$, и $u - \frac{1}{2}a = x$. Тогда положивъ AB $= \frac{1}{2}b$, и продолживъ BQ параллельно съ AP, получишь въ линеяхъ QM величины y. Напослѣдокъ положивъ AO $= \frac{1}{2}a$ и протянувъ OC параллельно съ AX, будешь имѣть въ линеяхъ CQ величины x; слѣд. изъ точки C какъ изъ центра и радіусовъ равнымъ $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$, то есть, равнымъ AC опиши кругъ, которой пересѣкши параболу AM въ точкѣ M, представитъ MP и AP за величины t и u.

335. Можно дѣлать сіи конструкціи разнымъ образомъ, на примѣръ, сложивъ одно изъ означенныхъ уравненій съ другимъ, умноженнымъ на произвольное количество $\frac{l}{n}$ положительное или отрицательное, получишь $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$ такое уравненіе, которое можетъ принадлежать какъ эллипсису, такъ и гиперболѣ, глядя по тому, какое количество будетъ взято за $\frac{l}{n}$, такъ что посредствомъ той или другой изъ сихъ кривыхъ линей можно сдѣлать такую же конструкцію, какую сдѣ-

дали выше посредствомъ круга. Можно также сочинить сїе уравненїе посредствомъ какой нибудь одной изъ нихъ и посредствомъ круга, давъ приличныя величины количеству $\frac{l}{n}$, и которыя послѣ не трудно опредѣлить по предписанному (319 и слѣд.).

336. Предложимъ вторымъ вопросомъ, *раздѣлить данной уголъ или данную дугу на три равныя части?*

Пусть дѣлимая дуга будетъ EO (*фиг.* 52), а A центръ ея; допустивъ, что EM представляетъ треть EO, проведи радїусы EA, MA, и опусти перпендикуляры MP, OR. Линея OR будучи синусъ, а AR косинусъ данной дуги EO, должны быть извѣстны; представимъ ихъ чрезъ d и c, радїусъ AE чрезъ r, наконецъ неизвѣстныя количества AP и PM чрезъ u и t.

По предположенїи сего, въ прямоугольномъ треугольникѣ APM получаю $u^2 + t^2 = rr$, и въ подобныхъ треугольникахъ APM, ARS вывожу AP : PM = AR : RS, то есть, $u : t = c : RS = \frac{ct}{u}$. Но естьли перпендикуляръ MP будетъ продолженъ до тѣхъ поръ, пока пересѣчетъ окружность въ точкѣ V, то дуга MV сдѣлается равна дугѣ MO по той причинѣ, что каждая изъ нихъ вдвое больше ME; слѣд. уголъ OMS = AMP = ASR = OSM (по причинѣ параллельныхъ линей). И такъ треугольникъ SOM есть равнобедренной, и слѣд. OS = OM = MV = $2t$; а поелику OR = OS + SR, то $d = 2t + \frac{ct}{u}$, или $2tu + ct = du$, или $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

И такъ два уравненїя, которыя должно сочинить, суть $u^2 + t^2 = r^2$ или $t^2 = r^2 - u^2$, и $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. Первое само по себѣ сочинено, потому что относится къ кругу EMO.

Что касается до втораго, то оно принадлежитъ гиперболѣ (326); а какъ недостаетъ въ немъ двухъ

квадратовъ, то должно въ сходственность упомянутаго параграфа поставить всѣ члены съ u въ одной части, отъ чего произойдетъ $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, или $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; сдѣлай $\frac{1}{2}d - t = y$, и вставивъ вмѣсто t величину его, получишь $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, или $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$. Напослѣдокъ сдѣлавъ $u + \frac{1}{2}c = x$, получишь $xy = \frac{1}{4}cd$ уравненіе, принадлежащее гиперболѣ между ея асимптотами, которыя опредѣли слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе $\frac{1}{2}d - t = y$ показываетъ, что естьли изъ точки A какъ начала u и t проведешь AB параллельную съ PM и равную $\frac{1}{2}d$, потомъ изъ B линею QBC параллельно съ AP, то получишь въ линеяхъ QM (ведя для нихъ счетъ противно PM) величины y; ибо $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; слѣд. CQ показываетъ направленіе одной изъ асимптотъ.

Естьли по второму уравненію $u + \frac{1}{2}c = x$ продолжишь AP къ сторонѣ G количества $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, то получишь въ линеяхъ GP или равныхъ имъ CQ (по проведеніи GC параллельной съ PM) величины x; слѣд. точка C представляетъ центръ, а линеи CQ и CG асимптоты. И такъ опиши по предписанному образцу (289) гиперболу между сими асимптотами; она пройдетъ чрезъ точку A, какъ то изображаетъ само уравненіе $xy = \frac{1}{4}cd = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$, и пересѣчетъ кругъ въ искомой точкѣ M.

Естьли дуга EO будетъ больше 90°, то косинусъ ея AR, упадая въ противную сторону, сдѣлается отрицательнымъ; слѣд. должно въ такомъ случаѣ предположить количество c отрицательнымъ. Когда же дуга EO будетъ больше 180°, а меньше 270°, какъ то видѣть можно въ дугѣ EO E′O′, то синусъ и косинусъ ея сдѣлаются отрицательными; слѣд. въ найденныхъ выше уравненіяхъ должно перемѣнить знаки у обоихъ количествъ c и d.

Естьли продолжишь GC на количество CG′ = CG, и CB на количество CB′ = CB, а потомъ проведши B′A′ и G′A′ параллельно съ CG′ и CB′, опи-

шешь между линеями CG′ и CB′ (неопредѣленно продолженными), какъ между асимптотами гиперболу проходящую чрезъ точку A′, то сїя гипербола пересѣчетъ кругъ въ двухъ точкахъ A′ и M′ также, какъ первая пересѣкла его въ M и M″. Но изъ четырехъ сихъ точекъ три только замѣчательны, именно, точки M, M′ и M″. Первая изъ нихъ представляетъ въ дугѣ EM треть данной EO, вторая M′ въ дугѣ E′M′ треть E′O дополненїя EO; наконецъ третья точка M″ изображаетъ въ дугѣ E′M′ треть EO E′O′, то есть, треть дуги OE, увеличенной половиною окружности.

Въ самомъ дѣлѣ дуга E′O имѣетъ синусомъ и косинусомъ тѣже линеи RO и AR, какїя дуга EO, съ тою только разницею, что по принятїи AR за косинусъ дуги E′O больше 90 градусовъ, онъ становится отрицательнымъ; и такъ для рѣшенїя сего втораго случая должно предположить въ предыдущемъ рѣшенїи количество c отрицательнымъ; но такое предположенїе перемѣняетъ только второе уравненїе, то есть, $xy = \frac{1}{4} cd$ въ $xy = -\frac{1}{4} cd$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ A′M′, и которое показываетъ, что рѣшенїе сего случая зависитъ отъ пересѣченїя M′ отрасли гиперболы съ кругомъ. (Мы увидимъ тотчасъ, для чего оно не зависитъ отъ A′). Слѣд. P′M′ будетъ синусъ искомой дуги въ семъ второмъ случаѣ; слѣд. треть дуги E′O должна представлять E′M′. —

Что касается до третьяго рѣшенїя, то увеличивъ дугу EO 180 градусами, получишь за синусъ и косинусъ сей увеличенной дуги EO E′O′ линеи R′O′, AR′, которыя совершенно равны предыдущимъ RO, AR, и разнятся въ томъ только, что упадаютъ съ противныхъ сторонъ, и становятся по той причинѣ отрицательными; слѣд. для рѣшенїя сего случая должно предположить c и d отрицательными количествами. Но такое предположенїе не производитъ никакой перемѣны въ уравненїи, въ которомъ заключаются оныя количества, то есть, въ уравненїи $xy = \frac{1}{4} cd$; почему прежняя гипербола должна рѣшить своимъ пересѣченїемъ M″ сей третїй случай; линея P″M″ представитъ синусъ искомой дуги въ треть-

емЪ случаѣ; сїя дуга будетЪ E′M″, то есть, E′M″ покажетЪ треть дуги EOE′O′.

ПосредствомЪ той же конструкцїи, которая служитЪ кЪ опредѣленїю трети данной дуги A, опредѣляется треть дуги $180^\circ - A$ и треть дуги $180^\circ + A$. Можно сдѣлать здѣсь примѣровку тому, что сказали мы (335) о разныхЪ перемѣнахЪ конструкцїй вЪ коническихЪ сѣченїяхЪ, выводя ихЪ изЪ произвольнаго совокупленїя двухЪ уравненїй вЪ u и t.

Что принадлежитЪ до четвертаго пересѣченїя, именно, до точки A′; хотя точка сїя находится на окружности, однако она не представляетЪ никакого новаго рѣшенїя, потому что опредѣляется дѣйствїями независящими отЪ уравненїй, кои выводитЪ рѣшенїе. Для опредѣленїя же ея сдѣлай B′A′ = AB и B′C = CB; послѣ чего получишь AR′ = AR и R′A′ = RO.

337. Естьли изЪ уравненїя $2tu + ct = du$, найденнаго выше, извлечешь величину t и поставишь ее вЪ уравненїи $u^2 + t^2 = r^2$, которое выведено было вЪ томЪ же мѣстѣ, то получишь, по вставкѣ за $c^2 + d^2$ величины его r^2, по перестановкѣ членовЪ и по приведенїи ... $4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u^2 - r^2c^2 = 0$, или $4u^3(u+c) - 3r^2u(u+c) - cr^2 \times (u+c) = 0$; изЪ сего уравненїя, по раздѣленїи его на $u + c$, выходитЪ $4u^3 - 3r^2u - cr = 0$ такое, которое должно заключать вЪ себѣ рѣшенїе трехЪ объявленныхЪ случаевЪ; слѣд. оно должно имѣть три корня; а какЪ сдѣланная конструкцїя показала намЪ, что u состоитЪ изЪ трехЪ величинЪ, именно, изЪ AP, AP′ и AP″ (двѣ послѣднїя упадаютЪ сЪ противныхЪ сторонЪ первой), то должно заключить, что корнями сего уравненїя будутЪ служить величины u, изЪ которыхЪ двѣ отрицательныя; именно, $u = -$ AP′, $u = -$ AP″, а третїя положительная, $u =$ AP.

338. Уравненїе $4u^3 - 3r^2u - cr = 0$, или $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$ относится кЪ несоизмѣримому или непривидимому случаю: но поелику корнями его должны быть косинусы $\frac{1}{3}$ EO, $\frac{1}{3}$ (180° — EO), $\frac{1}{3}$ (180° + EO), то можно посредствомЪ таблицЪ синусовЪ най-

ти три корня въ уравненіи третьей степени чрезъ достаточное и не въ продолжительное время имѣющее совершиться приближеніе. Вотъ тому способъ: представимъ всякое уравненіе третьей степени въ неприводимомъ случаѣ чрезъ $u^3 - pu + q = o$; послѣ чего сравнивъ съ нимъ уравненіе $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = o$, получимъ $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, и $-\frac{cr^2}{4} = q$; по симъ послѣднимъ уравненіямъ заключаю $r = \sqrt{(\frac{4}{3}p)}$, и $c = -\frac{3q}{p}$. Представимъ чрезъ R радіусъ таблицъ; тогда получимъ косинусъ дуги EO, такой, какой находится въ таблицахъ, чрезъ вычисленіе четвертаго члена въ слѣдующей пропорціи $r : c$ или $\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} = R : \frac{-3qR}{p\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}$; сыскавъ въ таблицахъ сей четвертой членъ, опредѣли по оному синусъ дополненія дуги EO; почему сложивъ найденное число градусовъ съ 90°, или напротивъ изключивъ тоже число изъ 90°, глядя по тому, какую величину представляетъ количество q, положительную или отрицательную, получишь дугу EO, которая, положимъ, равна A; сыщи въ тѣхъ же таблицахъ косинусы трехъ дугъ $\frac{A}{3}$, $\frac{180^\circ - A}{3}$ и $\frac{180^\circ + A}{3}$, и наконецъ для приведенія ихъ къ радіусу r, умножь каждой на $\frac{r}{R}$, то есть, на $\frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$; ибо для приведенія на примѣръ *кос.* $\frac{A}{3}$, взятаго изъ таблицъ въ косинусъ по радіусу r, должно сдѣлать такую посылку, $R : $ *кос.* $\frac{A}{3} = r$ къ косинусу той же дуги въ кругѣ, кому служитъ радіусомъ r, то есть, къ AP или u; почему три величины u будутъ слѣдующія, $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$ *кос.* $\frac{A}{3}$, $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$ *кос.* $\frac{180^\circ - A}{3}$, и $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$ *кос.* $\frac{180^\circ + A}{3}$, изъ которыхъ тѣ, коихъ дуги будутъ

превосходитъ 90° не далѣе однакожъ 270°, должно поставлять съ знакомъ —. Можно совершить тѣ же дѣйствія легче посредствомъ логариѳмовъ.

339. Предложимъ теперь такой вопросъ, которой былъ бы всеобщѣе разрѣшеннаго (211): *изъ точки D (фиг. 53), коей положеніе извѣстно въ разсужденіи двухъ линей AR, AP, составляющихъ между собою извѣстной уголъ, провести линею DP такъ, чтобъ заключающаяся между тѣми линеями часть RP была равна данной линеѣ?*

Проведи изъ точки D линею DS перпендикулярно къ продолженной AP, и линею DO параллельно съ AR; поставь также изъ точки R линею RN перпендикулярно къ AP. Линеи DO, DS, OS и AO должны быть извѣстны, какъ по данному положенію точки D, такъ и по тому, что уголъ RAP или его дополненіе RAN $=$ DOS предполагается извѣстнымъ. Представимъ DO чрезъ r, DS чрезъ p, OS чрезъ q, AO чрезъ d, а извѣстную линею, которой RP должна быть равна чрезъ c. Наконецъ неизвѣстныя AP и AR назовемъ u и t.

Въ подобныхъ треугольникахъ DSO, RNA получимъ DO : DS $=$ AR : RN, и DO : OS $=$ AR : AN, то есть, $r : p = t : \text{RN} = \frac{pt}{r}$, и $r : q = t : \text{AN} = \frac{qt}{r}$; слѣд. $\text{NP} = \frac{qt}{r} + u$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ RNP будемъ имѣть $(\text{RN})^2 + (\text{NP})^2 = (\text{RP})^2$, то есть, $\frac{qqtt}{rr} + \frac{2qut}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, или (по причинѣ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ DSO, $p^2 + q^2 = r^2$) получимъ $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = cc$.

Но какъ находится два неизвѣстныхъ, то должно вывести два уравненія; въ подобныхъ треугольникахъ DOP, RAP выходитъ DO : RA $=$ OP : AP, то есть, $r : t = d + u : u$, и слѣд. $ru = dt + ut$. Вотъ тѣ уравненія, которыя слѣдуетъ сочинить для рѣшенія даннаго вопроса.

Первое принадлежитъ (319) эллипсису, а второе гиперболѣ.

Для сочиненія первой экваціи дѣлаю $t + \frac{qu}{r} = y$, и поступая въ сходственность предыдущихъ примѣровъ, получаю $yy - \frac{qquu}{rr} + uu = cc$, или по причинѣ, что $-\frac{qquu}{rr} + uu = \left(\frac{rr - qq}{rr}\right) uu = \frac{ppuu}{rr}$, заключаю, что $yy + \frac{ppuu}{rr} = cc$. Дѣлаю $u = \frac{lx}{n}$ (324), и получаю $yy + \frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, или (по причинѣ, что могу предположить произвольную величину для какого нибудь изъ неопредѣленныхъ l и n) сдѣлавъ $l = r$, вывожу $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn}\left(\frac{ccnn}{pp} - xx\right)$. Сравнивъ сіе уравненіе съ $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4} aa - xx\right)$, найдемъ, что два сопряженные діаметра a и b будутъ $a = \frac{2cn}{p}$, и $b = 2c$. Опредѣлимъ положеніе ихъ и величину n; а дабы узнать лучше употребленіе сей конструкціи, то давъ попеременно линеямъ u или AP разныя величины, проведи параллельно къ AR линеи PM, равныя соотвѣтственнымъ величинамъ t; отъ чего произойдетъ кривая линея, относящаяся къ настоящему уравненію. По совершеніи сего возьми на AP линею AK произвольной величины, и проведи KL параллельно съ PM такую, которая бы содержалась къ линеи AK $= q : r$; тогда по причинѣ подобныхъ треугольниковъ AKL, APQ, получишь QM $=$ PM $+$ PQ $= t + \frac{qu}{r}$, и слѣд. QM $= y$; почему линея AQ будетъ представлять направленіе одного изъ діаметровъ, и линеи x должны имѣть свой счетъ на немъ; но уравненіе $u = \frac{l}{n} x = \frac{r}{n} x$ изображаетъ, что величины x раждаются въ одно время съ u, слѣд.

x состоятъ изъ AQ. По допущеніи сего, уравненіе $x = \frac{rx}{n}$ превращается въ $AP = \frac{r \times AQ}{n}$, изъ котораго выходитъ $n = \frac{r \times AQ}{AP}$, или $AP : AQ = r : n$, то есть, $AK : AL = r : n$; а какъ количество AK принимается произвольной величины, то можно положить его равнымъ r; послѣ чего получишь $n = AL$.

Теперь стоитъ только сочинить такой эллипсисъ (252), коегобы сопряженные діаметры сдѣлали между собою уголъ равный AQM; тотъ изъ діаметровъ, который имѣетъ направленіемъ AQ, долженъ $= \frac{2cn}{p}$, а другой имѣющій направленіемъ AR долженъ $= 2c$. Сей эллипсисъ рѣшитъ первое уравненіе.

Остается еще намъ сочинить второе уравненіе $ru = dt + ut$, или $ru - ut = dt$. И такъ поступая по предыдущимъ правиламъ, сдѣлай $r - t = y'$, потомъ $u + d = x'$; отъ чего уравненіе превращается въ $x'y' = rd$ такое, которое принадлежитъ гиперболѣ между ея асимптотами. Почему въ силу уравненія $r - t = y'$, положи на AK количество $AT = r = OD$. А это сдѣлай протянувъ изъ точки D линею DTV параллельно съ AP; тогда линеи VM, для которыхъ долженъ вести счетъ отъ V къ сторонѣ M, то есть, противно линеямъ PM, будутъ представлять y'; ибо $VM = PV - PM = r - t$; слѣд. $VM = y'$. Напослѣдокъ въ силу уравненія $u + d = x'$ сдѣлай $OA = d$, протянувъ изъ точки D линею DO параллельно съ AT; линеи DV будутъ представлять въ такомъ случаѣ x', потому что $DV = OP = OA + AP = d + u$. Почему начерченная (289) между линеями DO и DV, какъ асимптотами, гипербола должна пройти чрезъ точку A, потому что $x'y' = rd = AO \times AT$; сія гипербола пересѣчетъ эллипсисъ въ двухъ точкахъ M и M'; проведи изъ сихъ точекъ линеи MR и M'R' параллельно съ AP, чрезъ то получишь новыя двѣ R и R'; проведи изъ D чрезъ R и R' линеи DRP и DP'R', части PR и P'R' сихъ линей, заключающіяся въ равныхъ углахъ RAP, R'AP' будутъ равны данной линеѣ c.

Естьли по продолженіи асимптотѣ начертишь противоположную гиперболу $M''A'M'''$ (*фиг.* 54), то она пересѣченіемъ своимъ опредѣлитъ двѣ новыя точки M'' и M''', изъ которыхъ протянувъ параллели съ AP, получишь двѣ точки R'' и R''' такія, которыя сходствуютъ съ прежними R и R'; естьли проведешь отъ нихъ чрезъ точку D двѣ линеи $R''P''$ и $R'''P'''$, то линеи сіи, заключающіяся въ углѣ TAS, будутъ также равны данной *c*. Таковъ вообще способъ для рѣшенія опредѣленныхъ вопросовъ, изъ коихъ выводятся уравненія не выше четвертой степени.

340. Тѣмъ же способомъ, какимъ рѣшишь вопросъ, не употребляя двухъ неизвѣстныхъ, можешь рѣшить его съ новымъ неизвѣстнымъ. Пусть для примѣру будетъ данъ слѣдующій: *по извѣстнымъ стрѣлкѣ* CP (фиг. 55) *сферическаго сегмента и толщинѣ другаго, которой имѣетъ стрѣлкою остатокъ* PM *діаметра шара, опредѣлить сей діаметръ?*

Положимъ, что $r : c$ представляетъ содержаніе полупоперешника къ окружности, *a* стрѣлку CP, *t* стрѣлку PM; въ такомъ случаѣ количество $a + t$ будетъ равно діаметру, и толщина сегмента, имѣющаго стрѣлкою PM, изобразится чрезъ $\frac{c}{2r} \times tt\ (\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t)$. А какъ толщина сія предполагается извѣстною, то представляю ее чрезъ $\frac{c}{2r} \times \frac{1}{6}aap$, ($p$ будетъ количество извѣстное). Послѣ сего получаю $\frac{c}{2r}\ tt\ (\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t) = \frac{c}{2r} \times \frac{1}{6}aap$, или $t^3 + 3att - aap = 0$.

Для конструкціи сего уравненія, полагаю $t^2 = au$, и по вставкѣ получаю $tu + 3au - ap = 0$ уравненіе, принадлежащее гиперболѣ между ея асимптотами, которое сочинивъ вмѣстѣ съ параболическимъ $t^2 = au$, опредѣлю посредствомъ пересѣченія сихъ двухъ кривыхъ линей величину *t*.

КОНЕЦЪ.



ТАБЛИЦА
Матерїи.

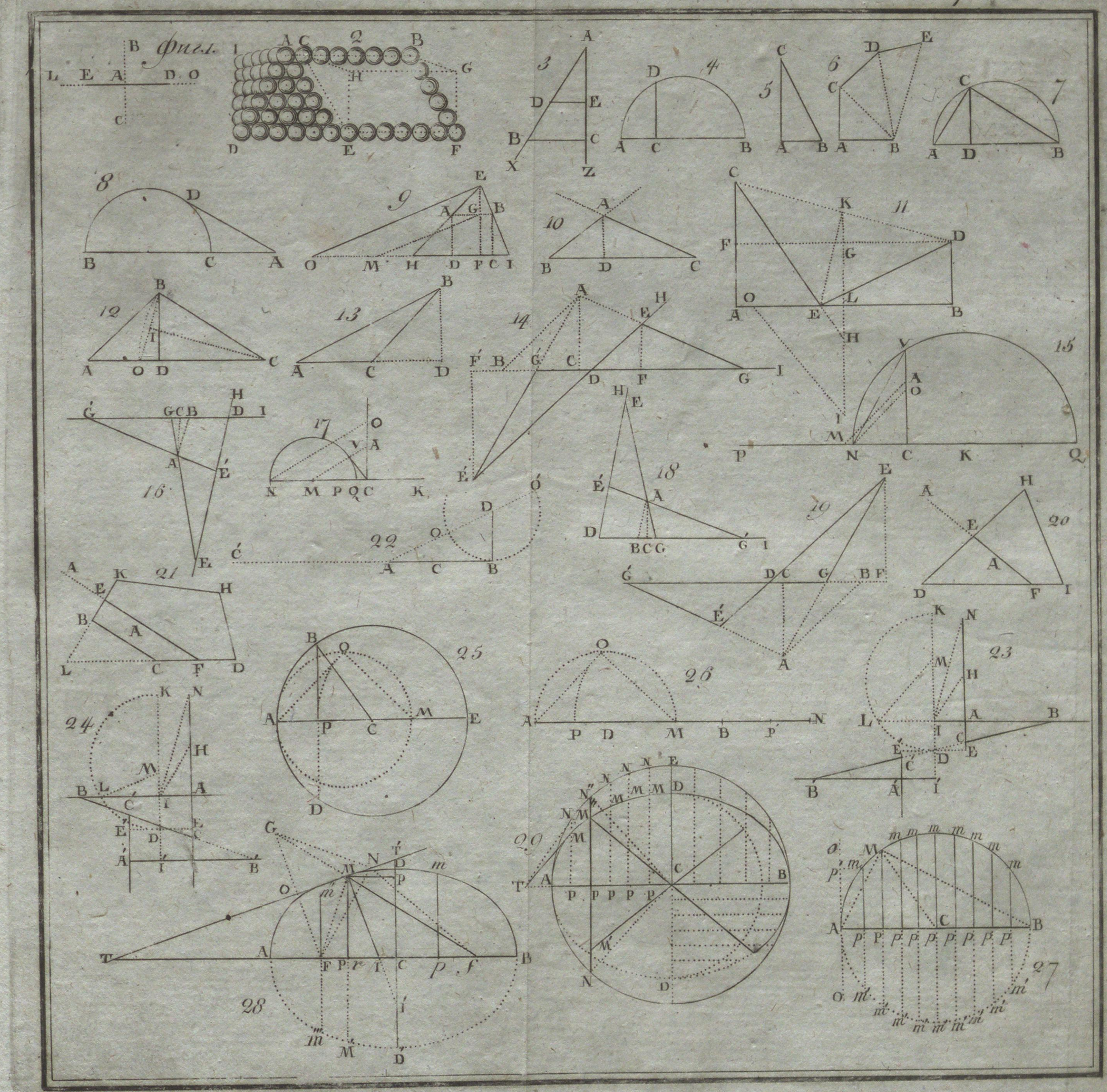
ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

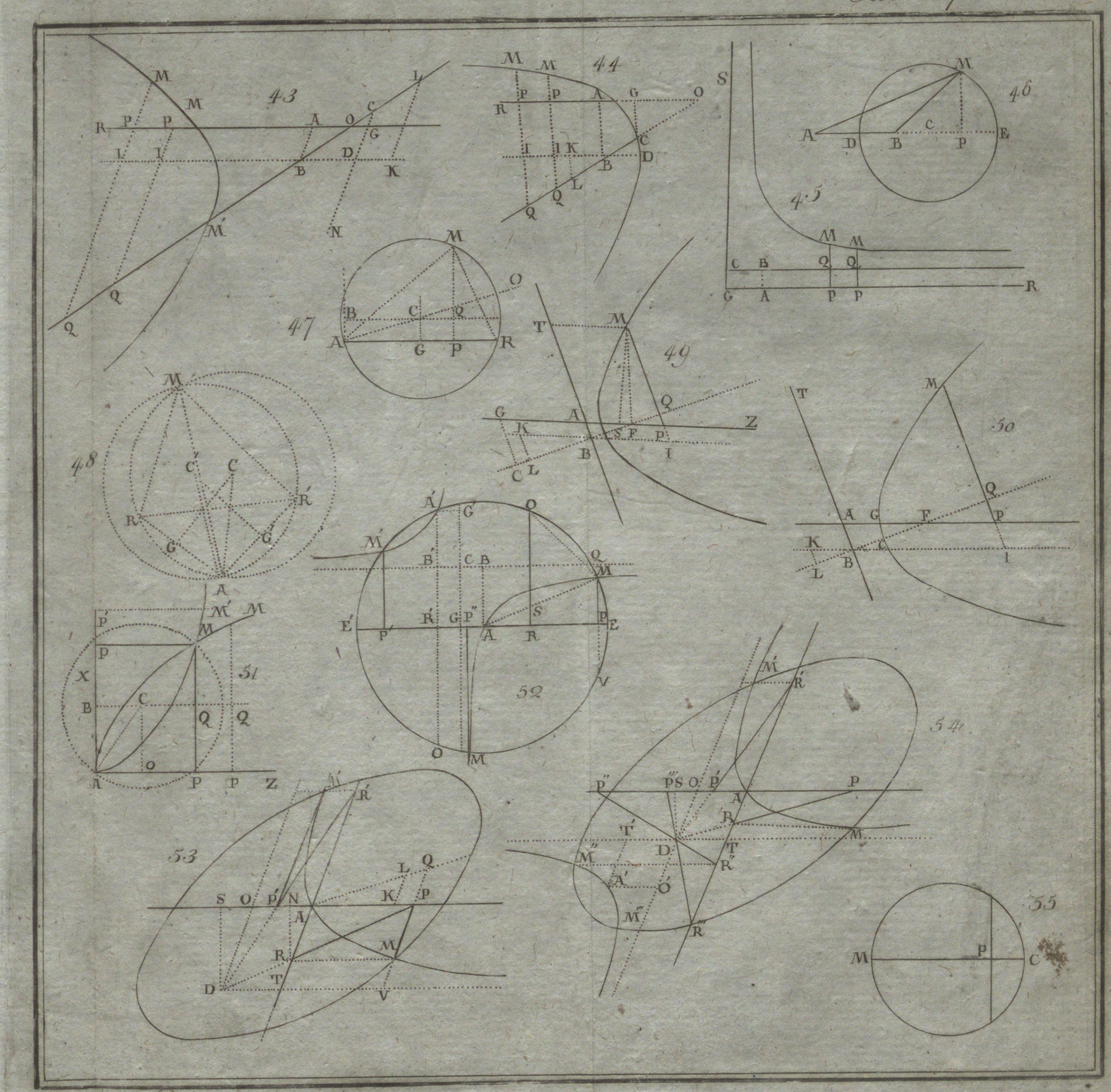
ВТОРОЕ ОТДѢЛЕНІЕ,

Конецъ Таблицы.

ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	Строк.	Напечатано.	Читай.
11	8	въ приведеніи	въ произведеніи
40	5	$5x - 21$	$5x = 21$
69	1	$ax -$	$ax +$
111	11	$x = -\frac{bc - ac}{2a - 2b}$	$x = -\frac{bc + ac}{2a - 2b}$
126	9 сниз.	$(a^2 + b^2)^{-1}$	$(a^2 - b^2)^{-1}$
150	1 сниз.	$(a - b)^{\frac{1}{2}}$	$(a + b)^{\frac{1}{2}}$
159	4	$(72 - 6y^2)^2$	$(72 - 6y^2)$
181	6	$\frac{1}{2}q + V$	$\frac{1}{2}q - V$
207	4 сниз.	$+ 3r^2$	$+ 3r$
219	1	$\frac{u}{qn - 1}$	$\frac{u}{q^{n-1}}$
225	1	$bab + d$	$ba + bd$
225	10	$(a + b)(a + b)$	$(a + b)(a - b)$
237	4	BC	BC (фиг. 10)
238	9	r^3	r^2
253	15	точки	точки A
273	9 сниз.	$\sqrt{s^3} : \sqrt{s^3}$	$\sqrt{S^3} : \sqrt{s^3}$
	10 сниз.	$\sqrt{s} : \sqrt{s}$	$\sqrt{S} : \sqrt{s}$
288	14	$MF = FMF$	$Mf = FMF$
320	8	GF	Gf
352	3	mO	mO'
354	9	a	aa
377	2	$\frac{px}{2m}$	$\frac{qx}{2m}$
394	4	неопредѣленнымъ	опредѣленнымъ.




43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55

